

## ОБЗОРЫ АКТУАЛЬНЫХ ПРОБЛЕМ

## Фазовые переходы в двумерных системах с непрерывным вырождением

С.Е. Коршунов

*Обсуждается характер и последовательность фазовых переходов в двумерных системах с непрерывным вырождением, в которых, помимо учета взаимодействия точечных топологических дефектов, необходимо принимать во внимание и иные факторы, а именно: наличие, наряду с непрерывным, и дискретного вырождения основного состояния (приводящего к возможности появления доменных стенок), снятие случайного вырождения флуктуациями, возможность образования солитонов, либо же действующий на вихри случайный потенциал. С формальной точки зрения речь идет о различных модификациях двумерной ХУ модели, тогда как физическими объектами, описываемыми такими моделями, являются в первую очередь гибридные сверхпроводящие структуры и неколлинеарные планарные антиферромагнетики.*

PACS numbers: 05.70.Fh, 64.60.Cn, 74.81.Fa, 75.10.Hk, 75.50.Ee

## Содержание

1. Введение (233).
2. Обычная ХУ модель (236).
  - 2.1. Низкотемпературная фаза. 2.2. Вихри и фазовый переход.
  - 2.3. Представление кулоновского газа. 2.4. Вихревые пары и поправка к модулю жесткости. 2.5. Ренормгрупповой анализ.
  - 2.6. Дуальное представление. 2.7. Модель синус-Гордона.
3. Сверхпроводящие сетки и решетки и фрустрированные ХУ модели (240).
  - 3.1. Решетки джозефсоновских контактов. 3.2. Фрустрированные ХУ модели. 3.3. Сетки из сверхпроводящих проволок.
  - 3.4. Представление кулоновского газа.
4. Максимально фрустрированная ХУ модель на квадратной решетке (242).
  - 4.1. Основное состояние и топологические возбуждения.
  - 4.2. Дробные вихри и фазовые переходы. 4.3. Фазовый переход на доменной стенке и его последствия. 4.4. Последовательность фазовых переходов. 4.5. Структура фазовой диаграммы при учете взаимодействия не только ближайших соседей.
5. Планарный антиферромагнетик с треугольной решеткой (249).
  - 5.1. Последовательность фазовых переходов в отсутствие магнитного поля. 5.2. Структура фазовой диаграммы во внешнем магнитном поле.
6. Планарный антиферромагнетик с решеткой кагоме (253).
  - 6.1. Основные состояния. 6.2. Нультемпературные флуктуации.
  - 6.3. Флуктуации при конечной температуре. 6.4. Фазовый пере-

- ход, связанный с упорядочением по киральностям. 6.5. Структура фазовой диаграммы.
  7. Солитоны и расщепление фазового перехода (261).
    - 7.1. ХУ модель с модифицированным взаимодействием.
    - 7.2. Классификация дефектов и возможные фазовые переходы.
    - 7.3. Дуальное и кулоновское представления. 7.4. Структура фазовой диаграммы.
  8. Двумерная сверхтекучая ферми-жидкость с  $p$ -спариванием (264).
    - 8.1. Аксиальная фаза. 8.2. Планарная фаза.
  9. ХУ модель со случайным сдвигом фазы (266).
    - 9.1. Случайный потенциал. 9.2. Беспорядок и появление неспаренных вихрей. 9.3. Вихревые пары и перенормировка модуля жесткости. 9.4. Структура фазовой диаграммы.
  10. Заключение (271).
- Список литературы (272).

## 1. Введение

В 70-е годы было показано, что в широком классе двумерных систем с непрерывным вырождением (включая в себя, в частности, планарные ферромагнетики [1–5], сверхтекучие [6] и сверхпроводящие [7] пленки, тонкие пленки жидких кристаллов [8] и двумерные кристаллы [9–11]) происходящий при повышении температуры фазовый переход в неупорядоченное состояние адекватным образом описывается в терминах диссоциации пар логарифмически взаимодействующих точечных топологических возбуждений — вихрей, дислокаций или дисклинаций (см. также обзоры [12–15]). Это послужило повышению интереса к экспериментальному исследованию различных двумерных систем с непрерывным вырождением, в том числе и таких, чьи термодинамические свойства не вполне укладываются в указанную выше схему. В первую очередь речь может идти об искусственно изготовленных сверхпроводящих объектах с дискретной структурой, таких как решетки джозефсонов-

С.Е. Коршунов. Институт теоретической физики им. Л.Д. Ландау РАН, 119334 Москва, ул. Косыгина 2, Российская Федерация  
Тел. (495) 137-32-44. Факс (495) 938-20-77  
E-mail: serkor@itp.ac.ru

Статья поступила 18 июля 2005 г.

ских контактов [16, 17], находящиеся во внешнем магнитном поле. Подобные системы характеризуются сочетанием непрерывного вырождения с дискретным.

Основной целью настоящего обзора является обсуждение структур упорядоченных состояний, характера фазовых переходов и вида фазовых диаграмм двумерных систем с непрерывным вырождением, адекватное описание термодинамики которых, помимо учета логарифмического взаимодействия точечных топологических дефектов, должно принимать во внимание также и иные существенные факторы. Рассматривается ряд представляющих интерес в различных контекстах ситуаций:

1) когда классификация топологических возбуждений системы, помимо точечных объектов, включает в себя также и линейные: доменные стенки или солитоны, что в свою очередь приводит к появлению нового класса дефектов — вихрей с дробным топологическим зарядом;

2) когда основные состояния, помимо чисто симметричного вырождения, обладают также и дополнительным вырождением, не связанным с симметрией гамильтониана, вследствие чего установление характера упорядочения при низких температурах требует анализа свободной энергии малых флуктуаций в окрестности основных состояний (в гармоническом приближении или даже с учетом ангармонизмов);

3) когда из-за наличия в системе беспорядка логарифмически взаимодействующие точечные дефекты испытывают воздействие случайного потенциала.

С формальной точки зрения речь идет о различных модификациях двумерной XY модели, а именно: фрустрированной, антиферромагнитной, с дополнительным минимумом взаимодействия и со случайным сдвигом фазы (которые в случаях, когда это приводит к качественным различиям, анализируются на решетках различной геометрии). С физической же точки зрения изложенные результаты применимы для описания решеток джозефсоновских или SFS (сверхпроводник–ферромагнетик–сверхпроводник) контактов, сеток из тонких сверхпроводящих проволок, неколлинеарных планарных антиферромагнетиков и тонких пленок сверхтекучей ферми-жидкости с  $p$ -спариванием (как в отсутствие внешнего магнитного поля, так и при его наличии).

Основной целью раздела 2, посвященного краткому обзору хорошо известных свойств обычной двумерной XY модели, является введение понятий и компактное описание методов, интенсивно используемых ниже.

В разделе 3 обсуждается возможность применения XY моделей для описания решеток джозефсоновских контактов и сеток из сверхпроводящих проволок, а также вводится понятие фрустрированных XY моделей [18], широко используемых для описания подобных гибридных структур при наличии перпендикулярного магнитного поля. Значительная часть обзора (разделы 4–6) посвящена анализу таких моделей в наиболее интересном случае, когда величина магнитного поля соответствует полуполому числу квантов потока на каждую элементарную ячейку. Эти модели принято называть максимально фрустрированными (fully frustrated) [20].

В разделе 4 рассматривается максимально фрустрированная XY модель на квадратной решетке — наиболее активно изучавшаяся модель статистической физики, сочетающая непрерывное вырождение с дискретным. В этой модели дискретное вырождение является простейшим из возможных, т.е. двукратным [19]. Это позволяет

предположить, что наряду с фазовым переходом Березинского–Костерлица–Таулеса (БКТ) [1–5], обусловленным диссоциацией вихревых пар и происходящим при температуре  $T = T_v$ , в системе должен иметь место также и второй фазовый переход (изинговского типа), связанный с появлением доменных стенок и происходящий при  $T = T_{dw}$  [20].

Вопрос о том, в какой именно последовательности происходят эти фазовые переходы, оказывается весьма нетривиальным. Дело в том, что взаимодействие доменных стенок с вихрями носит непертурбативный характер и обусловлено существованием нового класса топологических возбуждений — дробных вихрей [21, 22], образующихся на дефектах доменных стенок. Это существенным образом ограничивает возможные сценарии развития событий. При этом важную роль играет то, что на одиночной доменной стенке при  $T = T_k < T_v$  происходит фазовый переход, связанный с диссоциацией пар логарифмически взаимодействующих перегибов [23, 24]. Это приводит (для  $T > T_k$ ) к потере связи между флуктуациями фазы по обе стороны стенки, что в свою очередь обеспечивает выполнение соотношения  $T_v < T_{dw}$ , по крайней мере если фазовый переход при  $T = T_{dw}$  является непрерывным [24].

Если бы энергия доменной стенки была свободным параметром, позволяющим изменять  $T_{dw}$  независимо от  $T_v$  и  $T_k$ , понижение этого параметра привело бы (при  $T_{dw} = T_k$ ) к слиянию двух фазовых переходов в один (скорее всего, первого рода), и лишь после дальнейшего понижения  $T_{dw}$  в несколько раз произошло бы повторное расщепление фазовых переходов [22]. В новом режиме потеря фазовой когерентности была бы связана с диссоциацией пар дробных вихрей и происходила бы как отдельный фазовый переход при  $T = T_{fv} > T_{dw}$ . К сожалению, добавление к гамильтониану максимально фрустрированной XY модели на квадратной решетке взаимодействия с более далекими соседями не обеспечивает возможность независимого изменения  $T_{dw}$  и  $T_v$  [25]. Следовательно, и в этом случае в рассматриваемой системе реализуется лишь один из трех перечисленных выше сценариев разрушения  $U(1) \times Z_2$  упорядочения, при котором  $T_v < T_{dw}$ .

Однако оказывается, что при увеличении взаимодействия со следующими за ближайшими соседями происходит фазовый переход совсем иной природы, связанный с перестройкой основного состояния, которая приводит к исчезновению дискретного и появлению дополнительного непрерывного вырождения [26], не связанного с симметрией (т.е. случайного). Вследствие этого установление полной структуры фазовой диаграммы максимально фрустрированной XY модели с квадратной решеткой и взаимодействием не только ближайших соседей [25] оказывается возможным лишь при учете свободной энергии гармонических флуктуаций, которая приводит к снятию случайного вырождения.

Раздел 5 посвящен анализу антиферромагнитной XY модели на треугольной решетке. В отсутствие внешнего магнитного поля она представляет собой максимально фрустрированную XY модель, обладающую в случае треугольной решетки тем же самым вырождением основного состояния,  $U(1) \times Z_2$  [27], что и в случае квадратной решетки. Анализ структуры доменных стенок и свойств элементарных дефектов на этих стенках [28] позволяют убедиться, что все выводы предыдущего раздела, отно-

сящиеся к свойствам флуктуирующих доменных стенок и последовательности фазовых переходов в максимально фрустрированной XY модели, справедливы и в случае треугольной решетки [24].

Необычным свойством планарного антиферромагнетика с треугольной решеткой является сохранение непрерывного вырождения основного состояния [29] даже при приложении внешнего магнитного поля, разрушающего симметрию, ответственную за существование непрерывного вырождения в отсутствие поля. Различие в свободной энергии спиновых волн приводит к снятию этого случайного вырождения [30–32] и появлению трех различных упорядоченных фаз, обладающих трехподрешеточной структурой [29]. Все они характеризуются наличием настоящего дальнего порядка по ориентации спинов, принадлежащих к одной и той же подрешетке, а фазовые переходы между ними относятся к изинговскому классу универсальности [32].

Рассматриваемый в разделе 6 планарный антиферромагнетик с решеткой кагоме и взаимодействием как ближайших, так и следующих за ближайшими соседей, представляет собой еще один пример системы с комбинированным  $U(1) \times Z_2$  вырождением. Однако в отличие от моделей, рассмотренных в двух предыдущих разделах, в этой системе энергия доменной стенки является действительно независимым параметром, который определяется взаимодействием следующих за ближайшими соседями и обращается в нуль при исчезновении этого взаимодействия [33]. Это делает актуальным обсуждение возможности альтернативной последовательности фазовых переходов [22], когда появление бесконечных доменных стенок происходит при более низкой температуре, чем потеря фазовой когерентности, которая в этом случае связана с диссоциацией пар дробных вихрей.

Оказывается, что в такой ситуации доменные стенки имеют отнюдь не изинговскую природу, поскольку их появление приводит к перемешиванию шести различных вакуумов. Ренормгрупповой анализ, основанный на эквивалентности между доменными стенками в рассматриваемой модели и ступеньками в  $(2+2)$ -мерном аналоге модели поверхности кристалла и учитывающий взаимное влияние топологических возмущений различных типов, позволяет показать, что температура фазового перехода, связанного с появлением таких доменных стенок, зависит от энергии стенки на единицу длины не линейно, а гораздо более медленно [34]. Это приводит к чрезвычайной узости окна значений параметров, при которых возможна реализация сценария с  $T_{dw} < T_{fv}$ .

В случае, когда взаимодействующими являются только ближайшие соседи, энергия доменной стенки обращается в нуль, что приводит к экспоненциальному (по числу узлов в системе) вырождению основного состояния [35], не связанному с симметрией. Это случайное вырождение снимается при учете свободной энергии спиновых волн. Однако, поскольку гамильтониан, описывающий гармонические флуктуации, в данной модели имеет один и тот же вид для всех основных состояний, это происходит лишь при учете ангармонизмов. Из-за численной малости безразмерного параметра, характеризующего обусловленную флуктуациями свободную энергию доменной стенки, в такой ситуации два фазовых перехода должны происходить при весьма различных температурах,  $T_{dw} \sim 10^{-3} T_{fv}$  [34]. При этом дальний порядок по дискретным степеням свободы в низкотемпе-

ратурной фазе (при  $T < T_{dw}$ ) будет характеризоваться макроскопически большими значениями корреляционного радиуса [36], что делает наблюдение такого упорядочения чрезвычайно затруднительным.

Так же как в случае треугольной решетки, результаты, представленные в этом разделе, применимы для описания не только планарных антиферромагнетиков, но и решеток джозефсоновских контактов и сеток из сверхпроводящих проволок с полувещным числом квантов потока на каждую треугольную ячейку, а также решеток  $\pi$ -контактов в отсутствие магнитного поля. В таких системах взаимодействием, приводящим к снятию случайного вырождения, является магнитное взаимодействие токов [37].

В отличие от разделов 4–6, где анализируются модели, основные состояния которых характеризуются комбинацией непрерывного вырождения с дискретным, три следующих раздела посвящены эффектам, которые могут возникать в системах с чисто непрерывным  $U(1)$  вырождением. В разделе 7 рассматривается модификация обычной (т.е. нефрустрированной) XY модели, в которой вырождение основного состояния является таким же, как и в стандартной версии, однако, помимо вихрей, важную роль в термодинамике играют солитоны — линейные дефекты, существование которых определяется специфическим видом взаимодействия, обладающего дополнительным минимумом и характерного [38–40] для SFS контактов вблизи перехода в  $\pi$ -состояние [41–43]. В отличие от доменных стенок солитоны не являются неустранимыми топологическими особенностями, поэтому могут иметь точки окончания, которые, однако, представляют собой вихри с полувещным топологическим зарядом [44–46].

Статсумма такой модели может быть представлена в виде статсуммы кулоновского газа полувещных зарядов, взаимодействующих с бинарными переменными изинговского типа. Это позволяет продемонстрировать, что если энергия солитона мала, то переход БКТ расщепляется на два фазовых перехода, один из которых изинговского типа и связан с обращением в нуль свободной энергии солитона, а второй относится к классу универсальности БКТ и связан с диссоциацией пар вихрей с полувещным топологическим зарядом [44–46]. В промежуточной фазе сохраняется конечной сверхтекучая плотность, однако когерентным является движение не куперовских пар (парный коррелятор параметра порядка спадает экспоненциальным образом), а пар из куперовских пар [47, 48].

В разделе 8 продемонстрировано, что аналогичный механизм расщепления фазового перехода [49] работает в обеих сверхтекучих фазах ферми-жидкости с  $p$ -спариванием, которые характеризуются гораздо более сложным видом параметра порядка [50–52]. При этом эффективная величина спин-орбитального взаимодействия, определяющего энергию солитона и позволяющего регулировать глубину расщепления [49], может быть уменьшена произвольным образом при помощи перпендикулярного к пленке магнитного поля [49, 53].

В разделе 9 обсуждается двумерная XY модель со случайным сдвигом фазы, что в терминах вихрей соответствует появлению случайного потенциала с логарифмически расходящимися корреляциями [54]. Рассматривая влияние подобного беспорядка на расходимость главной поправки к взаимодействию вихрей по степе-

ням их химической активности, Рубинштейн, Шрайман и Нельсон [54] пришли к выводу о неизбежности в такой системе возвратного перехода в неупорядоченную фазу при понижении температуры (даже если беспорядок является сколь угодно слабым). Анализ поправок более высоких порядков показывает, что подобный подход не является вполне адекватным, поскольку в любой точке фазовой диаграммы значительная часть таких поправок оказывается расходящейся [55–57], что, вообще говоря, могло бы свидетельствовать о неустойчивости упорядоченной фазы.

Более аккуратный анализ, основанный на разложении по концентрации вихревых пар, позволяет построить фазовую диаграмму, на которой присутствует область стабильности упорядоченной фазы и отсутствует возвратный переход в неупорядоченную фазу [58–62]. При этом значение критической амплитуды беспорядка в области малых температур можно найти исходя из анализа вероятности спонтанного рождения одиночного вихря [60]. Рассмотренная в этом разделе модель применима для описания решетки джозефсоновских контактов с геометрическими нерегулярностями в присутствии поперечного магнитного поля, величина которого соответствует (в среднем) целому числу квантов потока на ячейку [63], а также планарных магнетиков со случайным взаимодействием Дзялошинского–Мория [64, 65].

## 2. Обычная XY модель

При пренебрежении квантовыми флуктуациями двумерный планарный ферромагнетик может быть описан при помощи так называемой XY модели (модели плоских ротаторов), определяемой гамильтонианом [1, 66]

$$H_{XY} = -J \sum_{\langle ij \rangle} \cos(\varphi_i - \varphi_j), \quad (1)$$

где  $J > 0$  — эффективная константа связи,  $\varphi_j$  — угол поворота (фаза) единичного спина  $\mathbf{S}_j \equiv (\cos \varphi_j, \sin \varphi_j)$ , расположенного в узле  $\mathbf{j}$  какой-либо регулярной решетки (например, квадратной), а суммирование производится по всем парам ближайших соседей ( $\langle ij \rangle$ ) на этой решетке (мы всегда будем обозначать пары ближайших соседей при помощи круглых скобок).

Гамильтониан (1) соответствует чисто обменному взаимодействию спинов. Непрерывный аналог (1)

$$H = \frac{1}{2} J \int d^2\mathbf{r} (\nabla\varphi)^2, \quad (2)$$

где переменная  $\varphi$  также определена только с точностью до сдвига на  $2\pi$ , применим для описания тонких пленок сверхтекучей бозе-жидкости [6] и (на не слишком больших масштабах [67]) сверхпроводящих пленок.

Основным состоянием XY модели является состояние, в котором все переменные  $\varphi_j$  равны друг другу. В силу симметрии гамильтониана по отношению к одно-временному повороту всех спинов оно является вырожденным по группе двумерных вращений  $O(2)$  (изоморфной  $U(1)$ ), а пространство вырождения представляет собой окружность, т.е. одномерную сферу  $S^1$ .

### 2.1. Низкотемпературная фаза

При самых низких температурах основной вклад в термодинамику систем с непрерывным вырождением

вносят малые флуктуации в окрестности основного состояния (спиновые волны). В работах Березинского [1] и Вегнера [66] было показано, что в случае XY модели (1) наличие таких флуктуаций приводит к степенному спаду корреляционной функции

$$C(\mathbf{r}) = \langle \exp [i(\varphi_{\mathbf{j}+\mathbf{r}} - \varphi_{\mathbf{j}})] \rangle \propto |\mathbf{r}|^{-\eta}$$

на больших расстояниях. Здесь  $\eta = T/2\pi\Gamma$ , а  $\Gamma$  — модуль жесткости (helicity modulus [68]), определяющий энергию спиновых волн в длинноволновом пределе (аналог сверхтекучей плотности).

Для модели (1) с квадратной решеткой значение  $\Gamma$  при  $T = 0$  совпадает с  $J$ , тогда как в случае треугольной решетки  $\Gamma = \sqrt{3}J$ . При повышении температуры модуль жесткости  $\Gamma$  уменьшается из-за его перенормировки тепловыми флуктуациями. За исключением тех случаев, когда это оговорено особо, мы будем предполагать температуру  $T$  выраженной в энергетических единицах, т.е. включающей в себя в качестве множителя константу Больцмана  $k_B$ .

Существование области температур со степенным спаданием  $C(\mathbf{r})$  означает, что при повышении температуры в системе должен происходить фазовый переход, поскольку при  $T \gg J$  тот же самый коррелятор заведомо должен спадать экспоненциальным образом. Поскольку в двумерных системах с непрерывным вырождением параметра порядка строгий дальний порядок при  $T > 0$  невозможен [68–73], в дальнейшем мы для краткости будем называть низкотемпературную фазу со степенным спаданием  $C(\mathbf{r})$  (так называемую фазу Березинского) упорядоченной, хотя более корректным является термин "квазиупорядоченная".

### 2.2. Вихри и фазовый переход

При повышении температуры основную роль в термодинамике двумерных систем с  $U(1)$  вырождением играют вихри [2–4] — топологические особенности, при обходе вокруг которых фаза меняется на  $2\pi m$ , где  $m$  — целое число, называемое топологическим зарядом вихря. По энергетическим соображениям можно ограничиться рассмотрением вихрей с минимальным топологическим зарядом  $m = \pm 1$ . В случае решеточной системы вихрю можно сопоставить конфигурацию  $\varphi_j$ , являющуюся локальным минимумом гамильтониана и центрированную на определенной ячейке решетки, при обходе вокруг которой (по произвольному контуру) и происходит набег фазы (рис. 1).

Энергия одиночного вихря  $E_v$  логарифмически расходится с размером системы  $L$ :

$$E_v \approx \pi\Gamma \ln L.$$

Поскольку энтропия одиночного вихря  $S_v$ , представляющая собой логарифм числа возможных положений вихря в решетке, расходится таким же образом, его свободная энергия

$$F_v = E_v - TS_v \approx (\pi\Gamma - 2T) \ln L$$

обращается в нуль при  $T = T_v = (\pi/2)\Gamma$  [3]. При больших температурах следует ожидать присутствия в системе свободных вихрей, которые приводят к экспоненциальному спаду корреляционной функции  $C(\mathbf{r})$  (поскольку каждый вихрь вызывает сильное изменение значения  $\varphi$  даже вдали от его центра). При  $T < T_v$  вихри

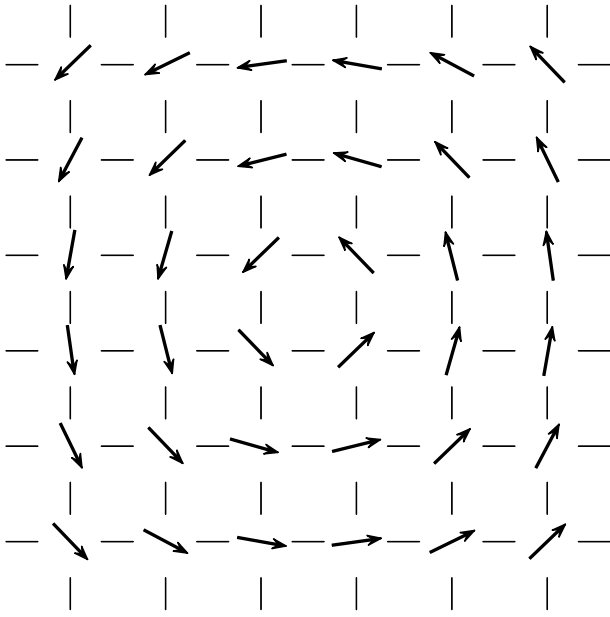


Рис. 1. Пример вихря с топологическим зарядом +1 на квадратной решетке.

могут существовать лишь в виде нейтральных связанных пар, наличие которых не приводит к изменению степенного характера спада  $C(\mathbf{r})$ . Фазовый переход, связанный с диссоциацией вихревых пар и изменением характера поведения корреляционной функции  $C(\mathbf{r})$  на больших расстояниях, принято называть переходом Березинского – Костерлица – Таулеса (БКТ).

### 2.3. Представление кулоновского газа

Статистическая сумма XY модели может быть представлена в виде

$$Z_{XY} = \prod_j \left( \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d\varphi_j}{2\pi} \right) \prod_{(ij)} w(\varphi_i - \varphi_j), \quad (3)$$

где

$$w(\theta) = \exp \left[ -\frac{V(\theta)}{T} \right]$$

— весовой фактор, зависящий от угла относительного поворота  $\theta_{ij} = \varphi_j - \varphi_i$  двух соседних спинов, а  $V(\theta)$  — энергия их взаимодействия. В стандартной XY модели (1) функция  $V(\theta)$  имеет вид

$$V_0(\theta) = -J \cos \theta.$$

Возможность анализа термодинамики XY модели исключительно в терминах газа логарифмически взаимодействующих топологических возбуждений становится очевидной при некотором изменении вида функции  $V(\theta)$ , описывающей взаимодействие соседних спинов, а именно при замене  $V_0(\theta)$  на взаимодействие Березинского – Виллэна [74, 75]  $V_{BV}(\theta)$ , определенное соотношением

$$w_{BV}(\theta) \equiv \exp \left[ -\frac{V_{BV}(\theta)}{T} \right] = \sum_{p=-\infty}^{\infty} \exp \left[ -\frac{J}{2T} (\theta + 2\pi p)^2 \right] \quad (4)$$

и обладающее той же периодичностью и симметрией, что и  $V_0(\theta)$ .

При  $J \gg T$  функция Березинского – Виллэна  $V_{BV}(\theta)$  всюду (за исключением малой окрестности точки  $\theta = \pi$ ) близка к параболе:

$$V_{BV}(\theta) \approx \text{const} + \frac{J}{2} \theta^2.$$

Отсюда видно, что в этом пределе использование  $V_{BV}(\theta)$  вместо  $V_0(\theta)$  соответствует пренебрежению ангармонизмами. В обратном же предельном случае, когда  $J \ll T$ , функция

$$V_{BV}(\theta) \approx \text{const} - 2T \cos \theta \exp \left( -\frac{T}{2J} \right)$$

с экспоненциальной точностью совпадает с  $V_0(\theta)$ , однако с совершенно иной константой связи:

$$J_{\text{eff}} = 2T \exp \left( -\frac{T}{2J} \right) \ll J.$$

При подстановке (4) в статсумму (3) возникает возможность выполнения интегрирования по всем переменным  $\varphi_j$ , поскольку при таком выборе  $w(\theta)$  это интегрирование становится гауссовым. В результате статсумма приобретает (с точностью до несущественного множителя) вид статсуммы двумерного кулоновского газа:

$$Z_{Cg} = \prod_{\mathbf{R}} \left[ \sum_{m_{\mathbf{R}}=-\infty}^{\infty} Y(m_{\mathbf{R}}) \right] \exp \left[ -\frac{H_{Cg}\{m_{\mathbf{R}}\}}{T} \right], \quad (5)$$

описываемого гамильтонианом

$$H_{Cg} = \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2} m_{\mathbf{R}_1} G_0(\mathbf{R}_1 - \mathbf{R}_2) m_{\mathbf{R}_2}, \quad (6)$$

где целочисленные переменные  $m_{\mathbf{R}}$  (заряды кулоновского газа) могут считаться определенными в узлах  $\mathbf{R}$ , принадлежащих дуальной решетке. Каждая из них представляет собой сумму целочисленных переменных  $p_{ij} \equiv -p_{ji}$ , определенных на связях исходной решетки, по периметру элементарной ячейки, содержащей узлы  $\mathbf{R}$ , и может быть идентифицирована с топологическим зарядом этой ячейки.

Входящее в (6) взаимодействие  $G_0(\mathbf{R}_1 - \mathbf{R}_2)$  имеет вид

$$G_0(\mathbf{R}_1 - \mathbf{R}_2) = 4\pi^2 J (-\hat{\Delta})_{\mathbf{R}_1 \mathbf{R}_2}^{-1}, \quad (7)$$

где  $\hat{\Delta}$  — оператор Лапласа, определенный на дуальной решетке, и для больших расстояний является логарифмическим:

$$G_0(0) - G_0(\mathbf{R}) \approx 2\pi \Gamma \ln |\mathbf{R}|. \quad (8)$$

Для общности в выражение (5) включены также химические активности зарядов кулоновского газа  $Y(m)$ , которые при формальном переходе от (3) к (5) оказываются равными единице, однако изменяются в процессе ренормировки (см. раздел 2.5).

В случае квадратной решетки фурье-образ  $G_0(\mathbf{R})$  представляет собой

$$G_0(\mathbf{q}) = \frac{4\pi^2 J}{2(1 - \cos q_x) + 2(1 - \cos q_y)}, \quad (9)$$

а разность  $G_0(0) - G_0(\mathbf{R})$  при  $\mathbf{R} \neq \mathbf{0}$  весьма близка к  $2\pi J(\ln |\mathbf{R}| + \pi/2)$  [76], что позволяет полагать

$$G_0(\mathbf{R} \neq \mathbf{0}) \approx G_0(0) - 2\pi J \ln |\mathbf{R}|,$$

$$Y(m) \approx \exp\left(-\frac{\pi^2 J}{2T} m^2\right).$$

В длинноволновом пределе ( $|\mathbf{q}| \ll 1$ ) для любой не вносящей анизотропии решетки

$$G_0(\mathbf{q}) \approx \frac{4\pi^2 \Gamma}{q^2}. \quad (10)$$

Выражение (10) применимо и для непрерывной модели (2), однако в этом случае вычисление энергии кора вихря, величина которой определяет  $Y$ , требует выхода за пределы приближения, учитывающего только фазовые флуктуации.

#### 2.4. Вихревые пары и поправка к модулю жесткости

Входящая в гамильтониан (6) функция  $G_0(\mathbf{R}_1 - \mathbf{R}_2)$  описывает затравочное взаимодействие зарядов кулоновского газа, находящихся в точках  $\mathbf{R}_1$  и  $\mathbf{R}_2$ . Их полное (т.е. перенормированное) взаимодействие может быть определено как отклик системы на добавление двух бесконечно малых пробных зарядов (находящихся в точках  $\mathbf{R}_1$  и  $\mathbf{R}_2$ ) и может быть представлено в виде

$$G(\mathbf{R}_1 - \mathbf{R}_2) = G_0(\mathbf{R}_1 - \mathbf{R}_2) - \frac{1}{T} \sum_{\mathbf{R}'_1, \mathbf{R}'_2} G_0(\mathbf{R}_1 - \mathbf{R}'_1) \Sigma(\mathbf{R}'_1, \mathbf{R}'_2) G_0(\mathbf{R}'_2 - \mathbf{R}_2). \quad (11)$$

Первое слагаемое в (11) есть не что иное, как затравочное взаимодействие пробных зарядов, а второе представляет собой флуктуационную поправку к их взаимодействию и включает в себя

$$\Sigma(\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2) = \langle m_{\mathbf{R}_1} m_{\mathbf{R}_2} \rangle, \quad (12)$$

корреляционную функцию зарядов кулоновского газа, которая в однородном случае зависит, естественно, только от разности  $\mathbf{R}_1 - \mathbf{R}_2$ .

Если считать, что все вихри связаны в нейтральные пары, находящиеся достаточно далеко друг от друга, то при  $\mathbf{R}_1 \neq \mathbf{R}_2$  главный вклад в  $\Sigma(\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2)$  будет связан с вероятностью того, что один из входящих в пару вихрей расположен в точке  $\mathbf{R}_1$ , а второй — в точке  $\mathbf{R}_2$ . В главном порядке по  $Y \equiv Y(\pm 1)$  этот вклад может быть представлен в виде

$$\Sigma(\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2) = -2W(\mathbf{R}_1 - \mathbf{R}_2), \quad (13)$$

где

$$W(\mathbf{R}) = Y^2 \exp\left[-\frac{E_{\text{pair}}(\mathbf{R})}{T}\right] \quad (14)$$

— весовой фактор для пары вихрей с топологическими зарядами  $m = \pm 1$ , энергия которой равна  $E_{\text{pair}} = G(0) - G(\mathbf{R})$ , а фактор 2 связан с наличием двух вариантов расположения зарядов в паре. В то же время из нейтральности пар следует, что

$$\Sigma(\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_1) = - \sum_{\mathbf{R}_2 \neq \mathbf{R}_1} \Sigma(\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2). \quad (15)$$

Подстановка (8) и (12)–(15) в (11) позволяет установить, что поправка к модулю жесткости, возникающая из-за присутствия нейтральных связанных пар имеет вид [5, 77]

$$\delta\Gamma = -\frac{2\pi^2 \Gamma^2}{T} \sum_{\mathbf{R}} R^2 W(\mathbf{R}). \quad (16)$$

В [76] аналогичное выражение было построено исходя из вида вклада вихревых пар в корреляционную функцию  $C(\mathbf{r})$ . Подстановка  $E_{\text{pair}} \approx 2\pi\Gamma \ln |\mathbf{R}|$  в (16) показывает, что  $\delta\Gamma$  расходится при той же температуре, при которой предлогарифмический фактор в выражении для свободной энергии одиночного вихря обращается в нуль.

#### 2.5. Ренормгрупповой анализ

Рекурсивная схема, позволяющая учесть ослабление модуля жесткости при последовательном переходе к все большему и большему масштабам (т.е. к вихревым парам все больших размеров), была построена Костерлицем [5]. Она приводит к уравнениям ренормировки для  $\Gamma$  и  $Y$ , имеющим вид

$$\frac{d\Gamma}{dl} = -4\pi^3 \frac{\Gamma^2}{T} Y^2, \quad (17)$$

$$\frac{dY}{dl} = \left(2 - \frac{\pi\Gamma}{T}\right) Y,$$

где  $l$  — логарифм масштаба. Аналогичные уравнения описывают ренормировку в одномерном газе с логарифмическим взаимодействием при условии, что знаки зарядов регулярно чередуются [78].

Характер ренормгрупповых траекторий, задаваемых уравнениями (17), схематически показан на рис. 2. Как видно из рисунка, в низкотемпературной фазе  $Y$  на больших масштабах перенормируется в нуль, а  $\Gamma$  стремится к конечному пределу, тогда как в высокотемпературной фазе перенормированное значение модуля жесткости,  $\Gamma(T) \equiv \Gamma(l = \infty, T)$ , стремится к нулю. Фазовый переход происходит тогда, когда значение  $\Gamma(T)$  удовлетворяет так называемому "универсальному критерию" Нельсона–Костерлица [6]

$$T_v = \frac{\pi}{2} \Gamma(T_v). \quad (18)$$

В случае сверхтекучей пленки этот критерий означает, что универсальным является отношение сверхтекучей плотности  $\rho_s$  при  $T \rightarrow T_v - 0$  и температуры

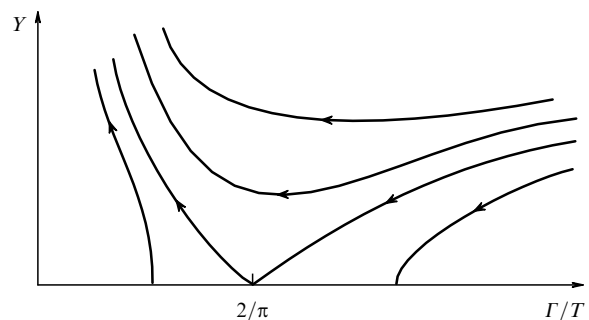


Рис. 2. Схематическое изображение характера ренормгрупповых траекторий, соответствующих уравнениям (17).

перехода  $T_v$  [6]:

$$\frac{\rho_s(T_v)}{T_v} = \frac{2}{\pi} \left( \frac{m}{\hbar} \right)^2.$$

Поскольку при  $T = T_v$  значение  $\Gamma$  (или  $\rho_s$ ) скачком изменяется с конечного значения до нуля, часто говорят об универсальном значении скачка  $\Gamma$  (или скачка  $\rho_s$ ).

Результаты численного моделирования по методу Монте-Карло показывают, что в стандартной XY модели с  $V(\theta) = -J \cos \theta$  и квадратной решеткой переход БКТ происходит при  $T_v \approx 0,89 J$  [79–83], в то время как на треугольной решетке  $T_v \approx 1,45 J$  [84]. Высокотемпературное разложение на треугольной решетке дает

$$T_v \approx (1,45 - 1,47) J$$

[85, 86]. В обоих случаях температура перехода оказывается почти вдвое ниже, чем это следует из наивной оценки

$$T_v \approx \frac{\pi}{2} \Gamma(T=0),$$

не учитывающей перенормировок.

Из уравнений (17) следует, что при приближении к  $T_v$  снизу функция  $\Gamma(T)$  имеет корневую особенность [6]:

$$\frac{\Gamma(T)}{T} - \frac{2}{\pi} \propto \sqrt{\frac{T_v - T}{T_v}},$$

тогда как при приближении к  $T_v$  сверху корреляционный радиус  $r_c$  расходится экспоненциальным образом [5]:

$$r_c \propto \exp \left[ -b \left( \frac{T - T_v}{T_v} \right)^{1/2} \right].$$

При этом концентрация свободных вихрей ведет себя как  $r_c^{-2}$ .

## 2.6. Дуальное представление

Если подставить в (3) выражение для весового фактора  $w(\theta)$  через его фурье-образ  $w_*(n)$ :

$$w(\theta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \exp(-i\theta n) w_*(n),$$

это также позволяет выполнить в статсумме интегрирование по всем переменным  $\varphi_j$ , после чего она приобретает [76, 87] (с точностью до несущественного, т.е. несингулярного множителя) вид статсуммы

$$Z_{\text{SOS}} = \prod_{\mathbf{R}} \left[ \sum_{n_{\mathbf{R}}=-\infty}^{\infty} \right] \exp \left( -\frac{H_{\text{SOS}}\{n_{\mathbf{R}}\}}{T} \right) \quad (19)$$

модели, применимой для описания поверхности кристалла (solid-on-solid model, SOS модель) и определяемой гамильтонианом [88]

$$H_{\text{SOS}} = \sum_{(\mathbf{R}\mathbf{R}')} V_*(n_{\mathbf{R}} - n_{\mathbf{R}'}). \quad (20)$$

Здесь целочисленные переменные  $n_{\mathbf{R}}$  (соответствующие высоте поверхности) заданы в узлах дуальной решетки, суммирование производится по всем связям на этой

решетке, а взаимодействие  $V_*(n)$  определено соотношением

$$w_*(n) = \exp \left[ -\frac{V_*(n)}{T} \right].$$

В случае стандартной XY модели с  $V(\theta) = -J \cos \theta$  дуальная SOS модель характеризуется взаимодействием [76, 87]

$$V_*(n) = -T \ln \left[ I_{|n|} \left( \frac{J}{T} \right) \right],$$

где  $I_n(z)$  — модифицированная функция Бесселя порядка  $n$ , тогда как в случае взаимодействия Березинского–Виллэна (4) функция  $V_*(n)$  имеет особо простой вид:

$$V_*(n) = \frac{J_*}{2} n^2,$$

где

$$J_* = \frac{T^2}{J} \quad (21)$$

— дуальная константа связи. SOS модель с таким видом взаимодействия принято называть дискретной гауссовой моделью [89].

В основном состоянии SOS модели все переменные  $n_{\mathbf{R}}$  равны друг другу, а вырождение этого состояния связано с группой симметрии  $Z_N$ . Простейшими возбуждениями, возникающими вследствие тепловых флуктуаций, в такой системе являются ступени единичной высоты — линии, при пересечении которых  $n_{\mathbf{R}}$  меняется на  $\pm 1$ . В дискретной гауссовой модели энергия такой ступени (на единицу длины)  $E_{\text{step}} = J_*/2$ , поэтому при  $T \ll J_*$  все ступени должны образовывать замкнутые петли, а при  $T = T_R \sim J_*$  происходит связанный с появлением бесконечных ступеней фазовый переход поверхности из гладкой фазы в шероховатую (roughening transition [88, 89]). В шероховатой фазе флуктуации поверхности расходятся:

$$\langle (n_{\mathbf{R}_1} - n_{\mathbf{R}_2})^2 \rangle \propto \ln |\mathbf{R}_1 - \mathbf{R}_2|,$$

в отличие от гладкой фазы, в которой ширина поверхности конечна.

Из вида (21) следует, что высокотемпературная фаза дискретной гауссовой модели соответствует низкотемпературной фазе XY модели и наоборот. Это делает дуальное представление (в виде SOS модели) удобным для исследования свойств высокотемпературной фазы XY модели, в которой велики флуктуации  $\varphi$ . В частности, можно показать [90, 91], что корреляционный радиус  $r_c$ , описывающий экспоненциальное спадание  $C(\mathbf{r})$ , связан простым соотношением  $r_c = T/F_{\text{step}}$  со свободной энергией ступени  $F_{\text{step}}$  и, следовательно, в случае взаимодействия Березинского–Виллэна (4) при  $T \gg J$  близок к  $2T/J_* = 2J/T$ .

То, что ренормгрупповой анализ Костерлица [5] адекватным образом описывает критические свойства XY модели, можно проверить, сравнив его с критическим поведением точно решаемой SOS модели, предложенной ван Бейереном [92] для описания флуктуаций грани (001) кристалла с объемно-центрированной кубической решеткой. Эта модель изоморфна одному из

вариантов шестивершинной модели, обычно называемому моделью льда [93], точное решение которой было найдено Либом [94, 95].

Поскольку дискретная гауссова модель является дуальной к ХУ модели со взаимодействием Березинского–Виллэна, допускающей редукцию к кулоновскому газу, статсумма такого кулоновского газа может быть получена непосредственно из статсуммы дискретной гауссовой модели. Для этого в (19) следует заменить суммирование по дискретным переменным  $n_{\mathbf{R}}$  на интегрирование [89] при помощи формулы суммирования Пуассона:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n) = \int_{-\infty}^{\infty} dn \sum_{m=-\infty}^{\infty} \exp(-2\pi im) f(n), \quad (22)$$

что приводит к появлению в статсумме суммирования по переменным  $m_{\mathbf{R}}$ , но позволяет выполнить интегрирование по всем переменным  $n_{\mathbf{R}}$ , поскольку оно является гауссовым.

Обратный переход от статсуммы кулоновского газа к статсумме дискретной гауссовой модели проще всего осуществить, расцепив в (5) взаимодействие различных переменных  $m_{\mathbf{R}}$  при помощи гауссова интегрирования по дополнительным переменным  $n_{\mathbf{R}}$ :

$$Z_{\text{Cg}} \rightarrow \prod_{\mathbf{R}} \left[ \int_{-\infty}^{\infty} dn_{\mathbf{R}} \sum_{m_{\mathbf{R}}=-\infty}^{\infty} Y(m_{\mathbf{R}}) \right] \times \exp \left[ 2\pi i \sum_{\mathbf{R}} m_{\mathbf{R}} n_{\mathbf{R}} - \frac{T}{2J} \sum_{\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2} n_{\mathbf{R}_1} (-\hat{\Delta})_{\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2} n_{\mathbf{R}_2} \right].$$

После этого суммирование по  $m_{\mathbf{R}}$  может быть выполнено независимо для каждого из узлов  $\mathbf{R}$ . При  $Y(m) \equiv 1$ , как следует из (22), эта процедура сводится к замене интегрирования по  $n_{\mathbf{R}}$  на суммирование, что и приводит  $Z_{\text{Cg}}$  к виду статсуммы дискретной гауссовой модели.

### 2.7. Модель синус-Гордона

Поскольку ренормгрупповой анализ показывает, что вклады от вихрей с топологическими зарядами, превышающими (по модулю) минимальный, несущественны, вклады в статсумму, соответствующие таким зарядам, могут быть опущены с самого начала. Если в статсумме кулоновского газа (5) положить

$$Y(m) = \begin{cases} 1, & m = 0, \\ Y \ll 1, & m = \pm 1, \\ 0, & |m| > 1, \end{cases}$$

то преобразование, описанное в последнем абзаце предыдущего раздела, преобразует ее [96] в статсумму так называемой модели синус-Гордона (sine-Gordon model), определяемой гамильтонианом

$$H_{\text{SG}} = \frac{J_*}{2} \sum_{(\mathbf{R}\mathbf{R}')} (n_{\mathbf{R}} - n_{\mathbf{R}'})^2 - y \sum_{\mathbf{R}} \cos(2\pi n_{\mathbf{R}}) \quad (23)$$

(где  $y = 2YT$ ), зависящим, в отличие от (20), от непрерывных переменных  $n_{\mathbf{R}}$ .

Ренормгрупповые уравнения для непрерывной версии гамильтониана (23) были впервые построены Вигманом [96] (см. также [97]) и, как и следовало ожидать, эквивалентны уравнениям (17). Представление синус-Гордона оказывается наиболее удобным для систематического

изучения поправок к (17) более высоких порядков по  $Y$  и  $2 - \pi\Gamma/T$  и позволяет убедиться, что они не приводят к изменению критического поведения [98].

## 3. Сверхпроводящие сетки и решетки и фрустрированные ХУ модели

### 3.1. Решетки джозефсоновских контактов

При пренебрежении магнитными полями токов ХУ модель (1) применима также для описания решетки джозефсоновских контактов [16, 17], состоящей из регулярно расположенных сверхпроводящих островков, каждый из которых связан с соседними джозефсоновским образом. При этом речь может идти как о туннельных контактах сверхпроводник–изолятор–сверхпроводник, так и о системах, в которых взаимодействие сверхпроводящих островков обусловлено эффектом близости и происходит через подложку из нормального металла. В обоих случаях  $\varphi_j$  есть фаза параметра порядка на  $j$ -м островке, а

$$J = \frac{\hbar}{2e} I_c,$$

где  $I_c$  — критический ток одиночного контакта.

Вообще говоря, известно, что магнитные поля токов приводят к экранировке логарифмического взаимодействия вихрей как в непрерывных двумерных сверхпроводниках (сверхпроводящих пленках [67]), так и в дискретных (решетках джозефсоновских контактов [17, 99]). Это происходит на расстояниях, сравнимых с глубиной проникновения магнитного поля в двумерный сверхпроводник

$$A = \frac{\phi_0^2}{8\pi^3 \Gamma},$$

где

$$\phi_0 = \frac{hc}{2e}$$

— квант потока. В частности, в случае сверхпроводящей пленки формула (10) переходит в

$$G(\mathbf{q}) = \frac{4\pi^2 \Gamma}{q^2 + q/A}. \quad (24)$$

Однако, как было показано в [7], значение  $A$  при температуре  $T_v$ , при которой диссоциация вихревых пар происходила бы в отсутствие экранировки, удовлетворяет следующему из (18) и (24) соотношению

$$A(T_v) = \frac{\phi_0^2}{16\pi^2 k_B T_v} \approx \frac{2 \text{ см}}{T_v},$$

где температура  $T_v$  предполагается выраженной в кельвинах. Поэтому при  $T_v$  порядка нескольких кельвинов (что является типичной температурой перехода в решетках джозефсоновских контактов [100, 101]) значение  $A(T_v)$  оказывается порядка типичного размера решетки (0,1–1 см) и, следовательно, эффектами экранировки можно пренебречь, что мы и будем делать в дальнейшем, если специально не оговорено обратное.



### 3.2. Фрустрированные XY модели

При введенных выше предположениях регулярная решетка джозефсоновских контактов, находящаяся во внешнем магнитном поле, может быть описана гамильтонианом [17]

$$H_{\text{ГХУ}} = -J \sum_{\langle ij \rangle} \cos(\varphi_j - \varphi_i - A_{ij}), \quad (25)$$

где определенные на связях решетки переменные  $A_{ij} \equiv -A_{ji}$  выражаются через интеграл от векторного потенциала  $\mathbf{A}(\mathbf{r})$  внешнего магнитного поля по линии, соединяющей центры соседних гранул:

$$A_{ij} = \frac{2\pi}{\phi_0} \int_{\mathbf{r}_i}^{\mathbf{r}_j} d\mathbf{r} \mathbf{A}(\mathbf{r}), \quad (26)$$

и являются замороженными, т.е. не флуктуируют. Во всех ячейках регулярной решетки направленная сумма переменных  $A_{ij}$  по ее периметру должна удовлетворять условию

$$\sum_{\square} A_{ij} = 2\pi f, \quad (27)$$

где  $f$  — отношение магнитного потока  $\phi$ , приходящегося на одну ячейку, к кванту потока  $\phi_0$ .

Модель, определяемую уравнениями (25)–(27), принято называть однородно фрустрированной XY моделью [18]. Из вида гамильтониана (25), каждое слагаемое в котором есть четная и периодическая функция своего аргумента, следует, что параметр  $f$  можно считать принадлежащим интервалу  $[0, 1/2]$ , а для всех значений  $f$ , лежащих вне этого интервала, простая замена переменных позволяет перейти к  $f \in [0, 1/2]$ . Ниже всегда предполагается, что значение  $f$  приведено к интервалу  $0 \leq f \leq 1/2$ . Понятно, что значение  $f = 0$  соответствует обычной (нефрустрированной) XY модели, рассмотренной в предыдущем разделе. Модели с максимальным неприводимым значением параметра  $f$  (т.е.  $f = 1/2$ ) принято называть максимально фрустрированными (fully frustrated) XY моделями [20]. В случае треугольной решетки XY модель с антиферромагнитным взаимодействием может быть переписана в виде (25) с  $A_{ij} \equiv \pm\pi$ , так что такая модель также относится к классу максимально фрустрированных XY моделей.

В течение последних двадцати лет фрустрированные XY модели с различными типами решеток и различными значениями  $f$  исследовались весьма интенсивно, что в основном было мотивировано активными экспериментальными исследованиями решеток джозефсоновских контактов (которым, в частности, посвящены обзоры [100, 101]). С точки зрения статистической физики основным свойством однородно фрустрированных XY моделей (с  $f \neq 0$ ) является сочетание непрерывного вырождения основного состояния (связанного с одновременным поворотом всех фаз) с дискретным вырождением, также имеющим симметричный характер. Это позволяет предположить возможность существования в системе различных фазовых переходов, один из которых связан с диссоциацией вихревых пар и аналогичен переходу БКТ в обычной XY модели [1–5], а другой (или другие) связан(ы) с дискретными степенями свободы [20]. Простейший вид дискретное вырождение имеет в максимально фрустрированной XY модели на квадратной или

треугольной решетке. В обоих этих случаях оно является двукратным [19, 27].

### 3.3. Сетки из сверхпроводящих проволок

В лондоновском пределе свободная энергия тонкой сверхпроводящей проволоки может считаться зависящей исключительно от калибровочно-инвариантного градиента фазы вдоль проволоки:

$$F_{\text{wire}} = \frac{J}{2} \int_0^L dx \left[ \frac{\partial \varphi}{\partial x} - \frac{2\pi}{\phi_0} A_{\parallel}(x) \right]^2, \quad (28)$$

где  $A_{\parallel}(x)$  — компонента векторного потенциала, направленная (локально) вдоль проволоки. При этом, если заданы значения фазы на концах проволоки (например,  $\varphi(0) = \varphi_i$ , а  $\varphi(L) = \varphi_j$ ), минимумы (28) достигаются при

$$\varphi(x) = \varphi_i + (\varphi_j - \varphi_i + 2\pi p - A_{ij}) \frac{x}{L} + \frac{2\pi}{\phi_0} \int_0^x dx' A_{\parallel}(x'), \quad (29)$$

где целочисленная переменная  $p$  — число оборотов (winding number), которые делает фаза при движении вдоль проволоки.

Подстановка (29) в (28) показывает [102, 103], что статсумма регулярной сетки, состоящей из таких проволок, имеет вид статсуммы однородно фрустрированной XY модели со взаимодействием Березинского–Виллэна:

$$Z_{\text{ГВВ}} = \prod_{\mathbf{j}} \left( \int_{-\infty}^{\infty} d\varphi_{\mathbf{j}} \right) \times \times \prod_{\langle ij \rangle} \left\{ \sum_{p_{ij}=-\infty}^{\infty} \exp \left[ -\frac{J}{2} (\varphi_j - \varphi_i + 2\pi p_{ij} - A_{ij})^2 \right] \right\}, \quad (30)$$

где  $\varphi_{\mathbf{j}}$  — значения фазы в узлах сетки, а слагаемые с различными значениями переменных  $p_{ij}$  соответствуют секторам, отличающимся друг от друга числами оборотов, которые делает фаза при движении вдоль сегмента сетки, соединяющего узлы  $\mathbf{i}$  и  $\mathbf{j}$ . Таким образом, XY модели со взаимодействием Березинского–Виллэна (как фрустрированная, так и обычная) представляют интерес не только в качестве аппроксиманта для исследования аналогичной модели с косинусоидальным взаимодействием, но и в контексте описания фазовых флуктуаций в сетках из тонких сверхпроводящих проволок.

### 3.4. Представление кулоновского газа

Выполнение в (30) гауссова интегрирования по всем переменным  $\varphi_{\mathbf{j}}$  переводит  $Z_{\text{ГВВ}}$  в статсумму кулоновского газа, описываемого гамильтонианом (6). Отличие от обычной XY модели состоит в том, что в случае однородно фрустрированной модели заряды кулоновского газа оказываются не целыми, а сдвинутыми относительно целых значений на  $-f$  [104], что еще раз демонстрирует достаточность рассмотрения интервала  $0 \leq f \leq 1/2$ .

Следует подчеркнуть, что термин "кулоновский газ" в такой ситуации оказывается весьма условным, поскольку в любом из возможных состояний все узлы дуальной решетки содержат (по построению) ненулевые заряды. В частности, максимально фрустрированным XY моделям соответствует заполнение дуальной решет-

ки полуцелыми зарядами. Поскольку заряды одного знака отталкиваются друг от друга, понятно, что наименьшей энергией в этом случае будут обладать состояния, в которых все заряды равны  $\pm 1/2$  и регулярным образом чередуются друг с другом. В случае квадратной или треугольной решетки это позволяет без всяких вычислений понять структуру основного состояния.

В то же время как в случае сотовой, так и в случае гексагональной ромбической решетки (dice lattice) [105–107] оказывается невозможным единственным способом разбить дуальную решетку на две эквивалентные подрешетки, а основное состояние максимально фрустрированной XY модели характеризуется бесконечным вырождением [108–110], обусловленным возможностью образования доменных стенок с нулевой энергией [22, 110]. В таких ситуациях даже выяснение структуры упорядоченного состояния, реализующегося при низких температурах в решетке джозефсоновских контактов или сетке из тонких сверхпроводящих проволок с полуцелым числом квантов потока на ячейку, требует весьма существенных усилий [36, 111–113], связанных с изучением различных механизмов снятия случайного вырождения.

Вопрос же о последовательности фазовых переходов оказывается далеко не простым даже в тех случаях, когда структура упорядочения в низкотемпературной фазе не вызывает сомнений. И если в предельном случае  $f \ll 1$  поведение системы может быть объяснено в терминах перехода вихревого кристалла в несоизмеримое состояние с последующим его плавлением [114, 115] (что подтверждается результатами численного моделирования [115–117]), то в, казалось бы, гораздо более простом случае, когда дискретное вырождение основного состояния является простейшим из возможных (т.е. двукратным), установление числа, характера и последовательности фазовых переходов представляет собой весьма нетривиальную задачу, обсуждение решения которой занимает основную часть трех следующих разделов.

#### 4. Максимально фрустрированная XY модель на квадратной решетке

Как уже упоминалось в разделе 3.2, регулярная решетка джозефсоновских контактов, находящаяся во внешнем магнитном поле, величина которого соответствует полному числу квантов потока на ячейку, может быть описана при помощи так называемой максимально фрустрированной XY модели [20], определяемой гамильтонианом

$$H = \sum_{\langle ij \rangle} V(\varphi_j - \varphi_i - A_{ij}), \quad (31)$$

где  $V(\theta) = -J \cos \theta$ , а переменные  $A_{ij}$  удовлетворяют условию

$$\sum_{\square} A_{ij} = \pi \pmod{2\pi} \quad (32)$$

для всех ячеек решетки. В настоящем разделе предполагается, что решетка является квадратной, а аналогичная модель на треугольной решетке обсуждается в разделе 5.

**4.1. Основное состояние и топологические возбуждения**  
Для изолированной ячейки решетки минимум (31) при условии (32) достигается, когда все определенные на

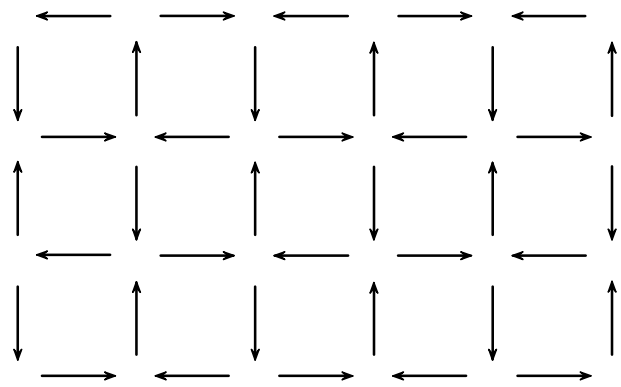


Рис. 3. Структура основного состояния максимально фрустрированной XY модели на квадратной решетке. Каждой стрелке соответствует  $\theta_{ij} = \pm\pi/4$ , при этом знак  $\theta_{ij}$  определяется направлением стрелки.

связях  $(\mathbf{i}, \mathbf{j})$  калибровочно-инвариантные разности фаз

$$\theta_{ij} = \varphi_j - \varphi_i - A_{ij} \equiv -\theta_{ji} \quad (33)$$

равны между собой, что в случае квадратной ячейки соответствует  $\theta_{ij} = \pm\pi/4$ . Здесь и далее переменные  $\theta_{ij}$  предполагаются приведенными к интервалу  $(-\pi, \pi)$ .

Основное состояние максимально фрустрированной XY модели на квадратной решетке может быть построено исходя из вида основного состояния для каждой из ячеек и имеет структуру [19], изображенную на рис. 3. Вид основного состояния не зависит от конкретного вида взаимодействия  $V(\theta)$  и характеризуется регулярным чередованием (в шахматном порядке) ячеек с положительными и отрицательными киральностями  $\sigma_{\mathbf{R}} = \pm 1$ , определенными через соотношение

$$\sum_{\square} \theta_{ij} = \pi \sigma_{\mathbf{R}}.$$

Помимо непрерывного вырождения, связанного с инвариантностью гамильтониана (31) по отношению к одновременному повороту всех фаз:

$$\varphi_j \rightarrow \varphi_j + \Delta\varphi,$$

основное состояние максимально фрустрированной XY модели на квадратной решетке обладает также и двукратным дискретным вырождением, связанным с инвариантностью (31) по отношению к одновременной смене знака всех  $\varphi_j$  и всех  $A_{ij}$  (что не ведет к нарушению условий (32)).

В соответствии с вырождением основного состояния рассматриваемая модель допускает существование двух типов топологических возбуждений — вихрей и доменных стенок [20]. Вихри представляют собой точечные дефекты, при обходе вокруг которых фаза проворачивается на  $\pm 2\pi$ , т.е. имеют тот же смысл, что и в обычной XY модели (без фрустрации); см. раздел 2.2.

Так же как и в случае обычной XY модели, можно ожидать, что диссоциация вихревых пар будет происходить при выполнении "универсального критерия" (18). Поскольку для стандартного вида взаимодействия  $V(\theta) = -J \cos \theta$  значение модуля жесткости в основном состоянии максимально фрустрированной XY модели на квадратной решетке равно  $J/\sqrt{2}$ , простейшая (т.е. не

учитывающая перенормировок  $\Gamma$ ) оценка для температуры диссоциации вихревых пар  $T_v \approx (\pi/2)\Gamma(0)$  дает  $T_v \approx 1,11 J$  [21]. Если же считать, что относительная величина перенормировки  $\Gamma$  в точке фазового перехода такая же, как и в отсутствие фрустрации, получим  $T_v \approx 0,6 J$ .

В представлении кулоновского газа основные состояния характеризуются регулярным чередованием положительных и отрицательных зарядов минимальной величины:

$$m_{\mathbf{R}}^{(0)} = \pm \frac{1}{2} (-1)^{R_x + R_y}, \quad (34)$$

где  $R_x$  и  $R_y$  (компоненты вектора  $\mathbf{R}$ ) — целые числа, а возможность выбора знака соответствует двукратному дискретному вырождению основного состояния. При этом значения переменных  $m_{\mathbf{R}}$  могут быть сопоставлены киральностям соответствующих ячеек:  $\sigma_{\mathbf{R}} = 2m_{\mathbf{R}}$ . Вихрям же могут быть сопоставлены избыточные целочисленные заряды на фоне одного из состояний (34). Для того чтобы адекватным образом воспроизвести закон взаимодействия вихрей на больших расстояниях, в представлении кулоновского газа следует произвести замену

$$J \rightarrow J_{\text{Cg}} = \frac{J}{\sqrt{2}},$$

поскольку в исходной системе  $\Gamma(T=0) = J/\sqrt{2}$ .

Доменная стенка может быть определена как топологическое возбуждение, разделяющее два основных состояния, которые не могут быть переведены одно в другое при помощи одновременного поворота всех фаз. Схематически ее можно представить в виде линии на исходной квадратной решетке (рис. 4), каждый сегмент которой разделяет две ячейки с одинаковой киральностью [20].

Доменная стенка характеризуется конечной энергией на единицу длины  $E_{\text{dw}}$ , поэтому при низких температурах ( $T \ll E_{\text{dw}}$ ) все доменные стенки, возникающие как тепловые флуктуации, представляют собой замкнутые петли. В случае прямой стенки непосредственное численное вычисление для XY модели с  $V(\theta) = -J \cos \theta$  дает  $E_{\text{dw}} \approx 0,343 J$  [21], тогда как в представлении кулонов-

ского газа получается весьма близкое значение [22]:

$$E_{\text{dw}} = \frac{\pi^2}{16\sqrt{3}} J_{\text{Cg}} \approx 0,308 J.$$

Представление кулоновского газа удобно тем, что позволяет также найти, как взаимодействие доменных стенок зависит от расстояния между ними  $L$ . Оно оказывается пропорциональным  $c_0^L$ , где  $c_0 = 3 - \sqrt{8} \approx 0,172$  [22], т.е. спадает экспоненциально быстро, поэтому при дальнейшем анализе учитываться не будет. Если пренебречь энергией, связанной с углами и пересечениями стенок, то гамильтониан подсистемы доменных стенок сводится к модели Изинга на дуальной решетке:

$$H_{\text{dw}} = -\frac{E_{\text{dw}}}{2} \sum_{(\mathbf{R}\mathbf{R}')} s_{\mathbf{R}} s_{\mathbf{R}'}, \quad (35)$$

точное решение которой для случая квадратной решетки было найдено Онсагером [118] и, в гораздо более удобном виде, Вдовиченко [119].

Входящая в (35) переменная  $s_{\mathbf{R}}$  — переопределенная киральность (staggered chirality):

$$s_{\mathbf{R}} = (-1)^{R_x + R_y} \sigma_{\mathbf{R}}.$$

Температуру  $T_{\text{dw}}$ , при которой в модели Изинга происходит фазовый переход, связанный с появлением бесконечных доменных стенок и разрушением дальнего порядка по  $s$ :

$$T_{\text{dw}} = \frac{E_{\text{dw}}}{\ln(1 + \sqrt{2})}, \quad (36)$$

можно найти и не зная точного решения — из соображений дуальности [120]. Подстановка  $E_{\text{dw}} \approx 0,343 J$  в (36) дает  $T_{\text{dw}} \approx 0,39 J < T_v$  [21]. В следующем разделе, однако, показано, что в рассматриваемой XY модели взаимодействие углов и пересечений доменных стенок не является короткодействующим и поэтому пренебрегать им нельзя.

#### 4.2. Дробные вихри и фазовые переходы

Если зафиксировать основное состояние (значения  $\varphi_i$ ) с одной стороны от прямой бесконечной доменной стенки, то состояние с другой стороны от стенки не может быть выбрано произвольным образом и зависит как от положения, так и от ориентации этой стенки. В частности, равновесные состояния по другую сторону вертикальной и горизонтальной доменных стенок отличаются друг от друга поворотом на  $\pm\pi/2$ . Это означает, что если доменная стенка образует прямой угол (рис. 4б), то возникает рассогласование на  $\pm\pi/2$  между состояниями, в которых мы должны оказаться, пересекая ее горизонтальный и вертикальный участки. Это рассогласование должно быть устранено непрерывным изменением фазы таким образом, чтобы при обходе вокруг угла набиралось  $\pm\pi/2$ . Таким образом, все углы доменных стенок должны вести себя как дробные вихри с топологическим зарядом  $\pm 1/4$ , взаимодействие которых в 16 раз слабее взаимодействия обычных вихрей [21, 22].

Наличие избыточной завихренности на угле доменной стенки следует также и из того, что сумма кираль-

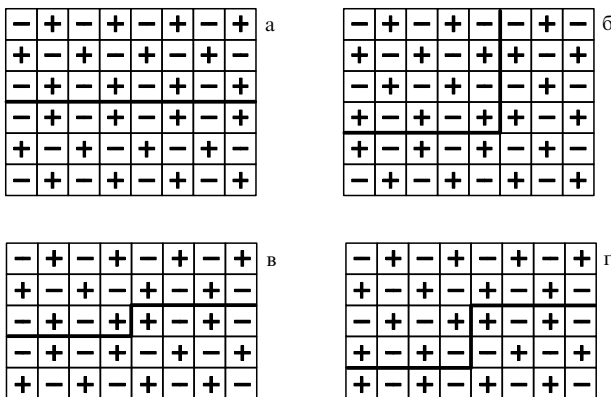


Рис. 4. Примеры доменных стенок: (а) прямая; (б) образующая прямой угол; (в) с простым перегибом; (г) с перегибом двойной высоты. Киральности ячеек решетки показаны знаками плюс и минус.

ностей четырех ячеек, окружающих угол, не равна нулю (рис. 4б). В то же время во всех узлах решетки, через которые не проходит доменная стенка (либо проходит прямая стенка) аналогичная сумма обращается в нуль.

Если бы дробные вихри с топологическим зарядом  $\pm 1/4$  не были привязаны к доменным стенкам, диссоциация образованных ими нейтральных пар происходила бы при температуре  $T = T_{fv}$ , где  $T_{fv} \ll T_v$  — решение уравнения

$$T_{fv} = \frac{\pi}{32} \Gamma(T_{fv}), \quad (37)$$

аналогичного уравнению (18). Однако суммарный топологический заряд дробных вихрей, связанных с какой-либо замкнутой доменной стенкой, всегда является целым, поэтому при  $T < T_{dw}$ , когда все доменные стенки образуют замкнутые петли, о диссоциации пар дробных вихрей не может быть и речи. Помимо слабого логарифмического взаимодействия, они связаны (на больших масштабах) также и линейным взаимодействием, обусловленным свободной энергией доменных стенок, их соединяющих.

В то же время при  $T > T_{dw}$  существует целая сетка из пересекающихся доменных стенок, среднее расстояние между которыми порядка  $\xi_c$  — корреляционного радиуса для переменных  $s$ . В этом случае линейное взаимодействие дробных вихрей на масштабах, превышающих  $\xi_c$ , экранируется, что действительно делает возможным диссоциацию связанных пар таких вихрей, которая в свою очередь инициирует диссоциацию пар обычных вихрей. Отсюда следует, что если наивные оценки дают  $T_v \sim T_{dw}$  (и, следовательно,  $T_{fv} \ll T_{dw}$ ), то сценарий с  $T_v > T_{dw}$  невозможен, поскольку появление при  $T = T_{dw}$  бесконечных доменных стенок автоматически приводит к диссоциации пар дробных и целых вихрей [21, 22].

Проверке этого утверждения была посвящена работа Тийсена и Кнопса [121], в которой объектом численного моделирования по методу Монте-Карло был полцелый кулоновский газ (с зарядами  $m = \pm 1/2$ ) на квадратной решетке. Возможность независимого изменения энергии доменной стенки  $E_{dw}$  обеспечивалась добавлением к стандартному гамильтониану двумерного кулоновского газа (6) дополнительного взаимодействия ближайших соседей. Результаты показали, что при большой энергии доменной стенки в системе происходят два фазовых перехода, температуры которых удовлетворяют неравенству  $T_v < T_{dw}$  и далеки друг от друга. При уменьшении  $E_{dw}$  происходит понижение  $T_{dw}$ , практически линейное по  $E_{dw}$ , в то время как  $T_v$  зависит от  $E_{dw}$  гораздо слабее. При дальнейшем понижении  $E_{dw}$ , вместо того чтобы две линии фазовых переходов пересекались друг с другом, одна из них поглощает другую. Аналогичные результаты были получены в [122] для такой же модели, определенной на сотовой решетке, что в терминах XY моделей соответствует максимально фрустрированной модели на треугольной решетке.

Поскольку возникновение дробных вихрей на дефектах, связанных с доменными стенками, характерно не только для максимально фрустрированных моделей, но и для моделей с меньшими значениями параметра  $f$  (см., например, [123]), можно ожидать, что основной вывод этого раздела (о невозможности сценария с  $T_v > T_{dw}$ ) будет справедлив и для более широкого класса одно-

родно фрустрированных моделей [22]. Следует, однако, отметить, что в предложенном в [124] обобщении максимально фрустрированной XY модели на квадратной решетке, в котором константы связи различны для ферромагнитных и антиферромагнитных связей, возникают два типа доменных стенок (легкие и тяжелые [125]), благодаря чему дробные вихри оказываются связанными в нейтральные пары и при  $T > T_{dw}$ , что в подобной ситуации делает возможным  $T_v > T_{dw}$  [124, 125].

### 4.3. Фазовый переход на доменной стенке и его последствия

Рассмотрим бесконечную доменную стенку, существование которой обеспечивается, например, соответствующими граничными условиями. При нулевой температуре такая стенка будет абсолютно прямой (рис. 4а). При конечной температуре становится возможным появление на ней точечных дефектов — перегибов (кинков). Простейший перегиб (имеющий единичную высоту) изображен на рис. 4в.

Если зафиксировать состояние (значения  $\phi_j$ ) с одной стороны от прямой бесконечной стенки, то при смещении ее на одну постоянную решетки равновесное состояние с другой стороны от стенки проворачивается на  $\pi$  [21, 22]. Поэтому присутствие перегиба, изображенного на рис. 4в, приводит к рассогласованию на  $\pi$  между состояниями, в которых мы должны оказаться, пересекая стенку слева и справа от перегиба. Так же как и в случае угла на доменной стенке, это рассогласование должно быть устранено непрерывным изменением фазы таким образом, чтобы нужное значение набиралось при обходе вокруг перегиба.

Соответственно, простые перегибы должны вести себя как дробные вихри с топологическим зарядом  $\pm 1/2$  [24]. Энергия таких перегибов логарифмически расходится, а взаимодействие в четыре раза слабее, чем взаимодействие обычных вихрей. Изображенный на рис. 4д двойной перегиб не вносит аналогичного рассогласования в распределение фазы, так что его энергия является конечной.

Существование двух качественно различных типов перегибов легко объяснить исходя из того, что все углы на доменных стенках имеют топологические заряды  $\pm 1/4$ . Каждый перегиб образован двумя углами, причем в простом перегибе их топологические заряды имеют один и тот же знак и, соответственно, складываются друг с другом, в то время как в случае двойного перегиба заряды образующих его углов имеют разные знаки и, соответственно, компенсируют друг друга.

При низких температурах доменная стенка будет содержать конечную концентрацию свободных (т.е. не связанных в пары) двойных перегибов, тогда как все простые перегибы будут связаны в нейтральные (по топологическому заряду) пары (подчеркнем, что знак топологического заряда, связанного с перегибом, определяется его положением, а не ориентацией). Таким образом, хотя флуктуации доменной стенки из-за наличия свободных двойных перегибов расходятся при сколь угодно низкой температуре (так что она всегда находится в шероховатом, а не в гладком состоянии), тем не менее нарушается симметрия по отношению к сдвигу стенки на нечетное число постоянных решетки [24].

С повышением температуры фазовый переход в одномерном газе логарифмически взаимодействующих пере-

гибов приведет к диссоциации нейтральных пар и появлению конечной концентрации свободных простых перегибов [23]. Из сравнения логарифмически расходящейся энергии одиночного перегиба  $E_k \approx (\pi/4)G(T) \ln L$  с его энтропией  $S_k \approx \ln L$  следует, что это произойдет при температуре  $T_k$ , удовлетворяющей соотношению

$$T_k = \frac{\pi}{4} G(T_k). \quad (38)$$

Подчеркнем, что  $G(T)$  — "объемное" значение модуля жесткости, входящее в затравочное взаимодействие перегибов и не учитывающее каких-либо флуктуаций стенки. Тем не менее соотношение (38) является точным. Дело в том, что согласно ренормгрупповому анализу Булгадаева [126] в одномерном логарифмическом газе с произвольным чередованием зарядов (в отличие как от одномерного логарифмического газа с чередующимися зарядами [78], так и от двумерного кулоновского газа [5]) не происходит перенормировки префактора в логарифмическом взаимодействии, вследствие чего значение температуры перехода, следующее из сравнения энергии заряда с его энтропией, оказывается точным.

Сравнение (38) с (18) показывает, что  $T_k < T_v$ . Диссоциация пар перегибов при температуре, меньшей чем  $T_v$ , была впервые обнаружена в численных экспериментах [23, 127], авторы которых, однако, приняли фазовый переход при  $T = T_k$  за переход доменных стенок из гладкого в шероховатое состояние.

Диссоциация пар простых перегибов приводит к восстановлению симметрии между скорее четными и скорее нечетными положениями доменной стенки, а также к потере на стенке эффективной жесткости для флуктуаций фазы [24]. В присутствии свободных простых перегибов любая попытка создать градиент фазы в перпендикулярном к стенке направлении окажется безуспешной из-за того, что смещение таких перегибов под действием силы Магнуса (направление смещения определяется знаком топологического заряда) приведет к устранению этого градиента.

Ситуация вполне аналогична той, что имеет место "в объеме" при  $T > T_v$ , когда присутствие свободных вихрей препятствует созданию градиента фазы, т.е. сверхтекучего тока. При  $T < T_k$  все простые перегибы связаны в нейтральные пары и их относительное смещение требует конечной энергии, что ведет к сохранению эффективной жесткости на стенке.

С другой стороны, можно ожидать, что градиент фазы, направленный параллельно стенке, не будет проникать через нее. Вместо этого возникнет разность между концентрациями свободных простых перегибов с топологическими зарядами различного знака, которая и скомпенсирует разницу между градиентами фазы по обе стороны от стенки [24]. Хотя создание такой разности концентраций потребует некоторых затрат энергии, эти затраты будут пропорциональны длине стенки, тогда как проникновение градиента фазы на другую сторону стенки требует энергию, пропорциональную площади системы, что в термодинамическом пределе является менее выгодным. Аналогичным образом устроена граница зерен в кристалле, на которой разница в ориентациях кристаллитов скомпенсирована наличием последовательности дислокаций одного и того же знака.

Подчеркнем, что оба механизма работают только на масштабах, которые велики по сравнению с  $\xi_k$  (средним расстоянием между свободными простыми перегибами на стенке). Тем не менее их наличие означает, что связь между крупномасштабными флуктуациями фазы по обе стороны от стенки разрушается. В дальнейшем, говоря о роли доменных стенок, мы будем предполагать, что свойства системы анализируются на масштабах, превышающих  $\xi_k$ , так что связь между флуктуациями по обе стороны от стенки может считаться полностью отсутствующей. В недавней работе Оллсона и Тайтеля [128] вывод о том, что при  $T = T_k < T_v$  происходит подавление модуля жесткости в перпендикулярном к доменной стенке направлении, а также ряд других заключений этого раздела были подтверждены при помощи численного моделирования.

#### 4.4. Последовательность фазовых переходов

Модуль жесткости  $G(T)$  может быть определен, в частности, через отклик системы на введение сдвига в граничные условия [68, 77]. (На этом основан ставший уже стандартным метод численного вычисления  $G(T)$ , предложенный в [20].) Из возможности такого определения следует, что в ситуации, когда на доменной стенке теряется связь флуктуаций фазы, наличие хотя бы одной доменной стенки, пересекающей всю систему, автоматически приводит к занулению  $G(T)$ . В термодинамическом пределе это с неизбежностью происходит как только температура превышает  $T_{dw}$  — температуру фазового перехода, связанного с потерей дальнего порядка по антиферромагнитному упорядочению киральностей и появлением бесконечных доменных стенок [24].

Если рассматривать флуктуации дискретных степеней свободы (состоящие в появлении доменов с противоположным знаком  $s$ ) в терминах проблемы перколяции, то при  $T < T_{dw}$  существует пересекающий всю систему бесконечный кластер, образованный ячейками с одним и тем же значением  $s$ . Введение относительного сдвига между значениями фазы на левой и правой границах бесконечной системы приводит к появлению градиента фазы лишь в пределах этого бесконечного кластера. Все остальные кластеры имеют конечный размер и, следовательно, не чувствительны к граничным условиям на бесконечности.

Известно, что в двух измерениях (в отличие от трех) критическая точка модели Изинга совпадает с точкой перколяции в системе спиновых кластеров [129], так что при приближении к  $T_{dw}$  снизу плотность бесконечного кластера убывает как

$$\rho(T) \propto \xi_p^{-\Delta d}.$$

Здесь  $\Delta d = 2 - \bar{d} = 5/96$  [130, 131] — отклонение фрактальной размерности  $\bar{d}$  бесконечного кластера (при  $T = T_{dw}$ ) от его евклидовой размерности  $d = 2$  (в стандартной задаче о некоррелированной перколяции  $\Delta d = 5/48$  [132]), а

$$\xi_p(T) \propto (T_{dw} - T)^{-\nu}$$

— перколяционная длина, температурная зависимость которой в модели Изинга описывается тем же индексом  $\nu = 1$  [133], что и температурная зависимость корреляционного радиуса  $\xi_c$ .

Поэтому даже затравочное (т.е. не перенормированное флуктуациями  $\varphi$ ) значение модуля жесткости при приближении к  $T_{dw}$  должно убывать степенным образом:

$$\Gamma_0(T) \propto (T_{dw} - T)^t,$$

по крайней мере столь же быстро, как  $\rho(T)$  (а на самом деле гораздо быстрее), что можно показать при помощи вариационного вычисления. Диссоциация вихревых пар происходит как только ренормированное значение  $\Gamma(T)$  становится равным  $(2/\pi)T$ , т.е. при более низкой температуре, чем  $T_{dw}$  [24]. Если  $T_{dw} \ll T_v^{(0)}$  (где  $T_v^{(0)} \approx (\pi/2)\Gamma(0)$  — простейшая оценка для  $T_v$ , не учитывающая перенормировок), то можно ожидать, что зависимость  $T_v$  от соотношения между  $T_v^{(0)}$  и  $T_{dw}$  будет иметь вид

$$T_{dw} - T_v \propto \left(\frac{T_{dw}}{T_v^{(0)}}\right)^{1/t}.$$

Оба перехода могут произойти одновременно лишь как фазовый переход первого рода, сопровождаемый превышающим универсальное значение скачком модуля жесткости  $\Gamma(T)$ .

Вывод о том, что  $\Gamma_0(T)$  сильно подавляется при приближении к  $T_{dw}$ , подтверждается сравнением результатов численного моделирования обычной и фрустрированной XY моделей [20], которые демонстрируют, что в последнем случае убывание  $\Gamma$  с ростом температуры (при одном и том же размере системы) происходит более быстро. Утверждение о том, что  $\Gamma(T)$  обращается в нуль при  $T \rightarrow T_{dw}$ , было впервые сделано Доенко и Уйминим [134, 135] для аналогичной модели на треугольной решетке (характеризующейся таким же вырождением основного состояния), однако без какого-либо обоснования.

Таким образом, мы продемонстрировали, что в максимально фрустрированной XY модели на квадратной решетке присутствие на доменных стенках свободных простых перегибов приводит в широком интервале температур, лежащих ниже  $T_v$ , к разрушению когерентности флуктуаций по различные стороны от стенки. Мы также показали, что диссоциация вихревых пар должна происходить при  $T_v < T_{dw}$ , поскольку при приближении к  $T_{dw}$  снизу часть системы, которая вносит свой вклад в модуль жесткости (определяющий взаимодействие вихрей), из-за наличия подобного свойства доменных стенок становится все менее плотной. Это делает невозможным слияние двух фазовых переходов в один, с новым критическим поведением (как это предполагалось возможным в [22, 136]), по крайней мере при  $T > T_k$ . В следующем разделе показано, что все эти выводы остаются справедливыми и при замене квадратной решетки на треугольную (что не меняет характера вырождения основного состояния).

Следует подчеркнуть, что полученные выводы не связаны с конкретным видом взаимодействия (пока остается неизменной структура основного состояния и, соответственно, его вырождение) и применимы, в частности, при учете взаимодействия более далеких соседей. Структура фазовой диаграммы максимально фрустрированной XY модели с квадратной решеткой и взаимодействием не только ближайших соседей обсуждается в следующем разделе.

В то же время описанный выше механизм, заставляющий  $T_v$  лежать ниже  $T_{dw}$ , работает только при  $T_{dw} > T_k$ .

Если бы энергия доменной стенки  $E_{dw}$  была свободным параметром, позволяющим изменять  $T_{dw}$  независимо от взаимодействия вихрей, понижение  $E_{dw}$  привело бы (при понижении  $T_{dw}$  до  $T_k$ ) к слиянию двух фазовых переходов в один. Сравнение с результатами численного моделирования для  $f = 2/5$  [137, 138], а также ряд иных соображений (аналогичных изложенным в разделах 6.4 и 7.4) позволяют заключить, что это должен был бы быть переход первого рода с неуниверсальным значением скачка  $\Gamma(T)$ , меняющимся вдоль этой линии. Лишь после дальнейшего существенного (в несколько раз) понижения  $E_{dw}$  и повышения отношения  $\Gamma(T_c)/T_c$  до  $32/\pi$  произошло бы повторное расщепление фазовых переходов [22]. При еще более низких значениях  $E_{dw}$  потеря фазовой когерентности была бы связана с диссоциацией пар дробных вихрей, которые при  $T > T_{dw}$  связаны лишь логарифмическим взаимодействием, и происходила бы при  $T = T_{fv} > T_{dw}$  [22]. В разделе 6 показано, что все три сценария разрушения комбинированного  $U(1) \times Z_2$  упорядочения реализуются в антиферромагнитной XY модели на решетке кагоме, в которой (в отличие от максимально фрустрированной модели на квадратной решетке) добавление к гамильтониану взаимодействия с более далекими соседями обеспечивает возможность практически независимого изменения  $E_{dw}$ .

В течение последних двадцати лет максимально фрустрированная XY модель на квадратной решетке была предметом интенсивных численных исследований. При этом данные, полученные в более ранних работах, либо не позволяли разрешить  $T_v$  и  $T_{dw}$  [20, 124, 139], либо свидетельствовали в пользу  $T_v > T_{dw}$  [140]. Однако развитие численных методов и вычислительных возможностей привели к изменению ситуации. Результаты более поздних работ с использованием различных методов численного моделирования [141–145], дают

$$T_v = (0,440 - 0,449)J, \quad T_{dw} = (0,452 - 0,454)J$$

и свидетельствуют в пользу соотношения  $T_v < T_{dw}$ , находясь, таким образом, в согласии с результатами нашего анализа. Численное моделирование модели со взаимодействием Березинского–Виллэна [146], а также эквивалентного ей кулоновского газа с полупелыми зарядами [147, 148] также демонстрируют, что  $T_v < T_{dw}$ .

Начиная со [136] основным аргументом, выдвигавшимся в ряде работ в пользу утверждения о совпадении температур двух фазовых переходов, являлось отличие критических индексов [136, 140–142, 149–152] от изинговских значений. Олссоном, однако, было продемонстрировано [146], что исключение малых масштабов из скейлингового анализа приводит к устранению этого разногласия. В [150] вывод о наличии в системе единственного фазового перехода был сделан исходя из отсутствия какого-либо расщепления пика теплоемкости. По-видимому, авторы этой работы были не в курсе, что переход БКТ не сопровождается какими-либо расходимостями производных свободной энергии.

Подчеркнем, что для обоих видов взаимодействия, а также для аналогичной модели на треугольной решетке (см. раздел 5) значения  $T_v$  и  $T_{dw}$ , найденные при помощи численного моделирования, оказываются чрезвычайно близкими и отличаются друг от друга на 1–2%. Представляется весьма вероятным, что это обстоятель-

ство не является случайным совпадением, а есть следствие того, что диссоциация вихревых пар происходит не сама по себе, а обусловлена быстрым падением модуля жесткости  $\Gamma(T)$ , индуцированным приближением к  $T_{dw}$ . Согласно оценкам, приведенным в разделе 4.1, при отсутствии взаимного влияния между двумя фазовыми переходами она должна была бы происходить при температуре, существенно превышающей  $T_{dw}$ :  $T_v \approx 1,5 T_{dw}$ .

Вывод о том, что  $T_v < T_{dw}$ , справедлив и для так называемой XY-изинговской модели, описываемой гамильтонианом [153]

$$H = -J \sum_{\langle ij \rangle} (1 + s_j s_{j'}) \cos(\varphi_j - \varphi_{j'}), \quad (39)$$

где  $s_j = \pm 1$  — дополнительные переменные изинговского типа. В этой модели, которая интенсивно исследовалась [154–157] в качестве аппроксиманта для фрустрированной XY модели на квадратной решетке, изначально отсутствует связь между флуктуациями  $\varphi_j$  по разные стороны от доменной стенки.

Не так давно Ли и др. [158] показали, что обобщенный вариант XY-изинговской модели дуален модели, предложенной ден Нийсом [159] для описания переходов шероховатости и реконструкции на поверхности кристалла с простой кубической решеткой. Предполагаемая фазовая диаграмма этой модели может быть найдена на рис. 3 в [160]. Для случая  $\Delta = 0$  (что соответствует XY-изинговской модели (39) с полным отсутствием связи фазовых переменных на стенке) она содержит две области, в одной из которых (с  $R < 0$ ) оба фазовых перехода происходят одновременно, а в другой (при  $R > 0$ ) последовательно. Как представленный в настоящем разделе анализ, так и результаты численного моделирования [158] свидетельствуют, что фазовые переходы не должны совпадать друг с другом в обоих режимах, т.е. для любого знака  $R$ .

Экспериментальное исследование квадратных решеток джозефсоновских контактов, находящихся в однородном магнитном поле, величина которого соответствует половине кванта потока на ячейку, производилось в целом ряде работ [161–167]. К сожалению, применяемые при этом методы (в частности, изучение температурной зависимости обеих компонент комплексного частотно-зависимого импеданса [161, 162], а также индекса, описывающего поведение вольт-амперной характеристики в пределе малых токов [163, 164]) позволяют получить информацию лишь о сверхпроводящем переходе, но не чувствительны к упорядочению по киральностям (по меньшей мере, если оно происходит при  $T = T_{dw} > T_v$ ).

#### 4.5. Структура фазовой диаграммы при учете взаимодействия не только ближайших соседей

Рассмотрим теперь обобщение гамильтониана (31):

$$H = - \sum_{i,j} J_{ij} \cos(\varphi_j - \varphi_i - A_{ij}), \quad (40)$$

в котором константа связи  $J_{ij}$  отлична от нуля не только для ближайших соседей на квадратной решетке, но и для следующих за ближайшими соседями:

$$J_{ij} = \begin{cases} J_1, & |\mathbf{i} - \mathbf{j}| = 1, \\ J_2, & |\mathbf{i} - \mathbf{j}| = \sqrt{2}, \end{cases} \quad (41)$$

в то время как значения переменных  $A_{ij}$  для следующих за ближайшими соседями также задаются соотношениями (26).

Исследование подобного обобщения представляет интерес в контексте поиска способа разведения температур двух фазовых переходов подалеже друг от друга (что сделало бы более доступным их разрешение в эксперименте или при численном моделировании) или же, наоборот, достижения их слияния в один переход первого рода. При изучении решетки из сверхпроводящих гранул, взаимодействие которых обусловлено эффектом близости и осуществляется через металлическую подложку [168, 169], необходимость учета взаимодействия более далеких соседей усиливается с понижением температуры, которое сопровождается ростом длины когерентности в нормальном металле [170].

При  $f = 1/2$  модель (40), (41) сочетает в себе черты как фрустрированной, так и обычной (не фрустрированной) XY моделей. При  $J_2 = 0$  гамильтониан (40) сводится к (31), а при  $J_1 = 0$  превращается в гамильтониан двух не связанных между собой обычных XY моделей. Поскольку элементарная ячейка для каждой из двух  $\sqrt{2} \times \sqrt{2}$  подрешеток, на которые распадается квадратная решетка при отсутствии взаимодействия ближайших соседей, имеет вдвое большую площадь, чем элементарная ячейка исходной решетки, взаимодействие следующих за ближайшими соседями оказывается не фрустрированным.

Структура основных состояний модели (40) зависит от отношения  $x = J_2/J_1 \geq 0$  [26]. При  $x < x_0 = 1/\sqrt{2}$  они имеют точно такой же вид, как и при  $J_2 = 0$ , при этом их энергия не зависит от  $J_2$ . В то же время при  $x > x_0$  основные состояния оказываются такими же, как и при  $J_1 = 0$ , когда связь между двумя  $\sqrt{2} \times \sqrt{2}$  подрешетками отсутствует. Энергия этих состояний не зависит от  $J_1$ , а вырождение представляет собой  $U(1) \times U(1)$ , где каждая из групп  $U(1)$  описывает вырождение в одной из двух не связанных XY моделей, относительная ориентация фазы в которых может быть произвольной [26].

При  $x = x_0$  энергии двух классов основных состояний сравниваются друг с другом, что, казалось бы, должно свидетельствовать о фазовом переходе первого рода. Однако оказывается, что при  $x = x_0$  эти состояния могут быть преобразованы друг в друга при помощи непрерывного преобразования, не ведущего к увеличению энергии [25, 26]. Таким образом, при  $x = x_0$  пространство вырождения включает в себя также дополнительный набор "промежуточных" состояний, которые могут быть получены из основного состояния для  $x < x_0$  при помощи синхронного поворота на произвольный угол  $\chi$  всех переменных  $\varphi_j$ , принадлежащих одной из двух подрешеток, показанных на рис. 5. При этом  $\chi = 0$  соответствует виду основного состояния для  $x < x_0$ , а  $\chi = \pi$  — для  $x > x_0$ .

Весьма любопытно, что добавление слабого взаимодействия с более далекими соседями не вносит каких-либо изменений в эту картину, за исключением сдвига значения  $x_0$ . В частности, сохраняется структура основных состояний, а при  $x > x_0$  энергия остается не зависящей от относительного сдвига фазы между двумя  $\sqrt{2} \times \sqrt{2}$  подрешетками [25].

Оказывается, что при  $x < x_0$  величина  $J_2$  не влияет не только на структуру и энергию основного состояния, но и на структуру и энергию прямой доменной стенки, а также

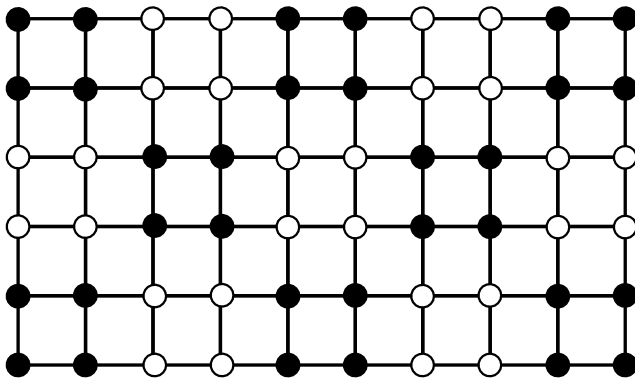


Рис. 5. Разбиение квадратной решетки на две подрешетки, реализуемое при  $x = x_0$ , когда возникает дополнительное вырождение основного состояния относительно разворота переменных  $\phi_j$ , принадлежащих разным подрешеткам, на произвольный угол  $\chi$ .

на модуль жесткости  $\Gamma$ . Это означает, что увеличение  $J_2$  не приводит к изменению соотношения между энергией доменной стенки и префактором в логарифмическом взаимодействии вихрей и, таким образом, не дает возможности эффективно влиять на соотношения  $T_v$  и  $T_{dw}$ . Отличие  $J_2$  от нуля будет проявлять себя лишь через изменение энергий вихрей и дефектов на доменных стенках. Результаты численного моделирования по методу Монте-Карло свидетельствуют, что  $T_{dw}/J_1$  несколько уменьшается с ростом  $J_2$  [25], что согласно результатам предыдущего раздела должно вести к дальнейшему уменьшению относительной разности между  $T_v$  и  $T_{dw}$ .

Дополнительное вырождение основного состояния при  $x > x_0$ , состоящее в возможности относительного вращения фаз, принадлежащих к различным  $\sqrt{2} \times \sqrt{2}$  подрешеткам, носит случайный характер и не связано с симметрией. Понятно, что подобное вырождение может сниматься самыми разными причинами (например, взаимодействием с более далекими соседями), однако, как уже обсуждалось выше, в рассматриваемой системе этот механизм снятия дополнительного вырождения не работает.

Единственной причиной для снятия случайного вырождения непосредственно в рамках какой-либо конкретной статфизической модели является различие в свободной энергии флуктуаций в окрестности различных основных состояний [171]. В системах с непрерывным вырождением подобный механизм впервые был проанализирован Шендером [172], который рассматривал квантовые флуктуации в гейзенберговском антиферромагнетике с квадратной решеткой и сильным ферромагнитным взаимодействием следующих за ближайшими соседями. Согласно [171] такой механизм снятия случайного вырождения часто называют "порядок из беспорядка".

Вычисление свободной энергии гармонических флуктуаций как функции относительного сдвига фазы между подрешетками показывает, что при  $x > x_0$  система может рассматриваться (при конечных температурах) как две связанных XY модели, взаимодействие которых имеет вид, близкий к  $\cos [p(\varphi - \varphi')]$ , где  $p = 4$ . И хотя это возмущение слабо (его амплитуда всегда мала по сравнению с температурой), при достаточно низкой темпера-

туре оно является существенным, т.е. растущим при ренормировке, откуда следует, что при таких температурах в системе должен существовать настоящий дальний порядок по относительному сдвигу фазы между подрешетками.

Инвариантность взаимодействия подрешеток по отношению к сдвигу относительной фазы на  $\pi/2$  следует из свойств симметрии основного состояния, так что учет каких-либо иных механизмов снятия случайного вырождения не может привести к качественным изменениям. Одним из таких механизмов является отличие вида джозефсоновской энергии от  $V_0(\theta) = -J \cos \theta$ , поэтому при исследовании снятия случайного вырождения в XY моделях следует иметь в виду, что описание в терминах кулоновского газа является точным лишь при специальном выборе  $V(\theta)$ , не совпадающим с  $V_0(\theta)$ .

Согласно результатам ренормгруппового анализа системы, состоящей из двух слабо связанных XY моделей [153, 173], температура  $T_{dec}$ , отделяющая область, в которой взаимодействие вида  $y_p \cos [p(\varphi - \varphi')]$  растет при ренормировке, от области, в которой оно убывает, определяется соотношением

$$T_{dec} = \frac{4\pi}{p^2} \Gamma(T_{dec}), \quad (42)$$

где  $\Gamma(T)$  — модуль жесткости в каждой из них. Сравнение с (18) показывает, что при  $p = 4$  определяемая уравнением (42) температура фазового перехода, связанного с потерей связи между подрешетками, лежит ниже  $T_v$  — температуры диссоциации вихревых пар в каждой из них. Таким образом, при  $x > x_0$  в рассматриваемой системе при повышении температуры должно происходить два фазовых перехода [25], первый из которых связан с симметрией  $Z_4$ , нарушенной при  $T < T_{dec}$ .

Спектр длинноволновых флуктуаций сохраняет жесткость и при  $x \rightarrow x_0 + 0$ . Это означает, что при уменьшении  $x$  до  $x_0$  температура диссоциации вихревых пар  $T_v$  остается конечной (это также подтверждается результатами численного моделирования [25]). При  $T < T_v$ ,  $T_{dec}$  и  $x \approx x_0$  должен каким-то образом происходить переход между фазами, структура которых соответствует двум классам основных состояний.

Появление при  $x = x_0$  дополнительного набора основных состояний, названных выше промежуточными, представляет собой еще один пример случайного вырождения. Поскольку численное интегрирование показывает, что свободная энергия гармонических флуктуаций оказывается выпуклой функцией косинуса угла  $\chi$ , параметризующего эти дополнительные основные состояния, в системе при изменении  $x$  (и малых, но конечных температурах) должен происходить фазовый переход первого рода [25]. Если бы свободная энергия флуктуаций оказалась вогнутой функцией  $\cos \chi$ , две низкотемпературных фазы были бы разделены узкой полоской третьей фазы, в которой с изменением  $x$  угол  $\chi$  менялся бы от 0 до  $\pi$  непрерывным образом.

Полученная из результатов этого раздела структура фазовой диаграммы максимально фрустрированной XY модели на квадратной решетке с нефрустрированным взаимодействием следующих за ближайшими соседями схематически показана на рис. 6. На рисунке можно увидеть также результаты численного моделирования такой системы [25] по методу Монте-Карло, показанные



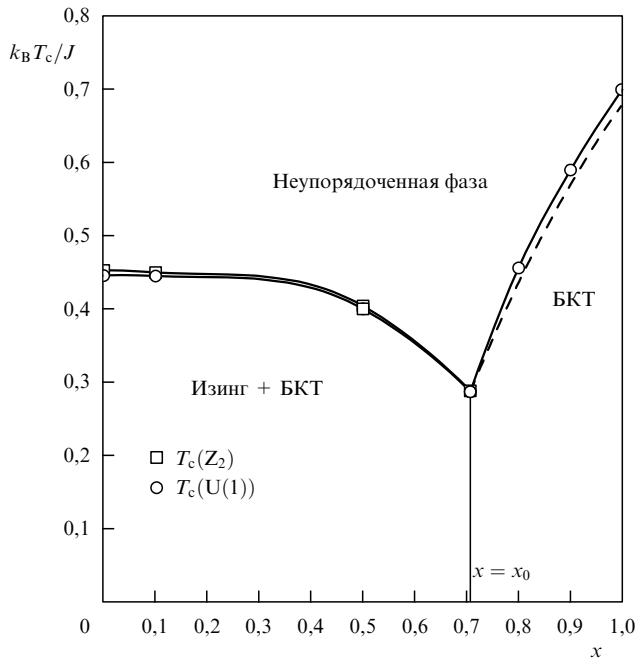


Рис. 6. Фазовая диаграмма максимально фрустрированной XY модели на квадратной решетке с нефрустрированным взаимодействием следующих за ближайшими соседями.

квадратиками (изинговский переход) и кружками (переход БКТ), размер которых приблизительно соответствует точности результатов. Численные исследования подтверждают существование двух различных низкотемпературных фаз, однако их точность оказывается недостаточной для разрешения расщепления обеих линий фазового перехода в полностью неупорядоченное состояние. Численное исследование нелинейной релаксации в этой же модели [174] подтверждает наличие фазового перехода второго рода при  $x < x_0$  и его отсутствие при  $x > x_0$ . К сожалению, этот метод не позволяет заметить переходы типа БКТ, которые являются переходами бесконечного рода.

### 5. Планарный антиферромагнетик с треугольной решеткой

#### 5.1. Последовательность фазовых переходов в отсутствие магнитного поля

В отсутствие внешнего магнитного поля планарный антиферромагнетик с обменным взаимодействием может быть описан гамильтонианом

$$H_{af} = J \sum_{(ij)} \cos(\varphi_i - \varphi_j), \tag{43}$$

где константа связи  $J > 0$ , а каждому спину сопоставлен двухкомпонентный единичный вектор  $\mathbf{S}_j = (\cos \varphi_j, \sin \varphi_j)$ .

Нетрудно заметить, что гамильтониан антиферромагнитной XY модели (43) эквивалентен гамильтониану (25) с  $A_{ij} = \pm\pi$ . Суммирование  $A_{ij}$  по периметру ячейки показывает, что в случае квадратной решетки антиферромагнитная XY модель не является фрустрированной, т.е. изоморфна обычной (ферромагнитной) XY модели (1). В случае же треугольной решетки такая модель

относится к классу максимально фрустрированных XY моделей и, соответственно, применима также и для описания решеток джозефсоновских контактов с полуцелым числом квантов потока на ячейку.

Абсолютный минимум (43) для трех спинов, принадлежащих какой-либо треугольной ячейке, достигается тогда, когда они образуют друг с другом угол  $2\pi/3$ . Это условие оказывается выполненным одновременно для всех ячеек решетки в имеющем трехподрешеточную структуру состоянии [175, 176], показанном на рис. 7а. В таком состоянии значения  $\varphi_j$  на трех эквивалентных подрешетках (А, В и С), на которые может быть разбита треугольная решетка, могут быть заданы в виде

$$\varphi_A = \Phi, \quad \varphi_B = \Phi \pm \frac{2\pi}{3}, \quad \varphi_C = \Phi \mp \frac{2\pi}{3}. \tag{44}$$

В терминах калибровочно-инвариантных разностей фаз, определенных уравнением (33), это состояние, в котором на всех связях  $\theta_{ij} = \pm\pi/3$ , а треугольные ячейки с положительными и отрицательными киральностями регулярным образом чередуются друг с другом (рис. 7а).

Так же как и в случае квадратной решетки (см. раздел 4), вид основного состояния не связан с конкретным видом взаимодействия и характеризуется комбинированным  $U(1) \times Z_2$  вырождением [27]. Непрерывное вырождение соответствует выбору переменной  $\Phi$  в (44) и связано с симметрией гамильтониана (43) по отношению к одновременному повороту всех спинов:

$$\varphi_j \rightarrow \varphi_j + \Delta\Phi, \tag{45}$$

а двукратное дискретное вырождение соответствует выбору верхнего или нижнего знака в (44) и связано с симметрией гамильтониана (43) по отношению к одновременному отражению всех спинов  $\mathbf{S}_j$  относительно произвольной оси (например, оси x):

$$\varphi_j \rightarrow -\varphi_j.$$

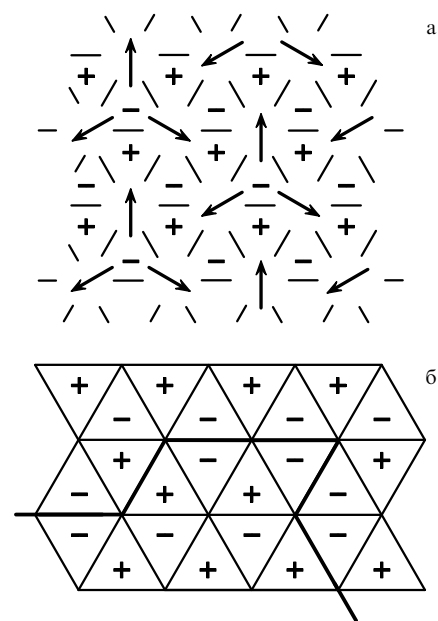


Рис. 7. Планарный антиферромагнетик с треугольной решеткой: (а) структура основного состояния; (б) доменная стенка. Киральности треугольных ячеек показаны знаками плюс и минус.

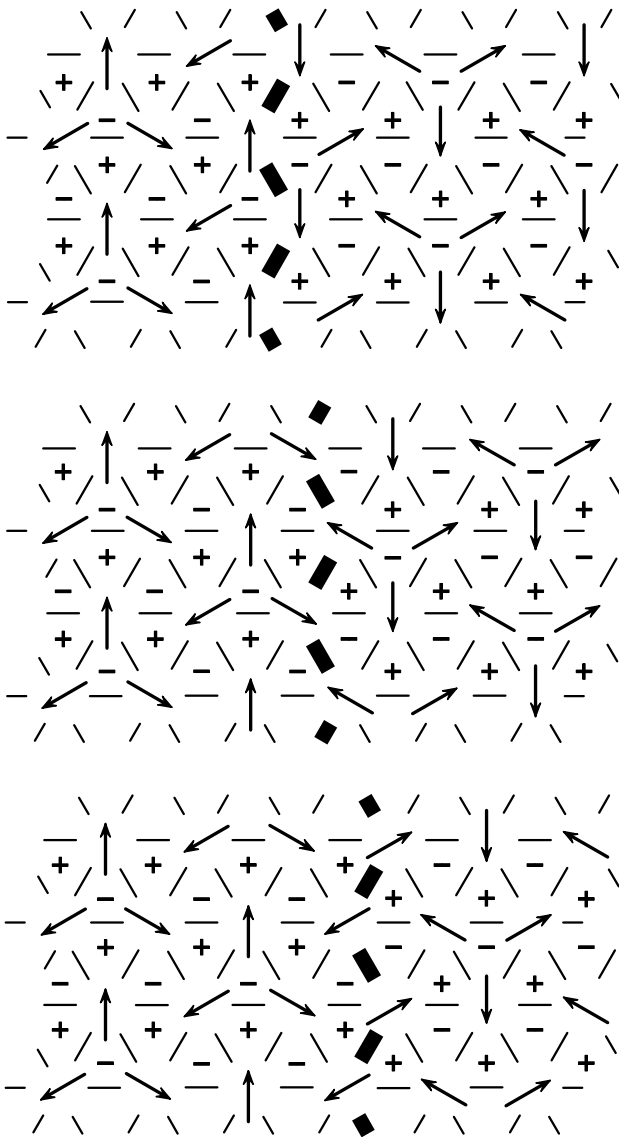


Рис. 8. Структура доменных стенок в терминах  $\phi_j$ .

В соответствии с вырождением основного состояния в рассматриваемой модели возможно появление как вихрей, так и доменных стенок изинговского типа [29, 134]. Поскольку при  $\theta_{ij} = \pm\pi/3$  значение модуля жесткости в основном состоянии оказывается в два раза ниже, чем в отсутствие фрустрации (т.е. при  $\theta_{ij} = 0$ ), из сравнения с [84] можно было бы ожидать, что диссоциация вихревых пар должна произойти при  $T_v \approx 0,7J$ .

Доменная стенка в антиферромагнитной XY модели на треугольной решетке представляет собой линию, проходящую по связям треугольной решетки и разделяющую ячейки с одинаковыми киральностями (рис. 7б). Она не содержит дробных вихрей, если соседние сегменты этой линии образуют друг с другом угол  $2\pi/3$  [28]. Структура таких доменных стенок в терминах исходных фазовых переменных показана на рис. 8. Интересно, что в отличие от случая максимально фрустрированной XY модели на квадратной решетке в представленных на этом рисунке примерах состояния слева и справа от стенки совпадают с соответствующим основным состоянием не только вдали от стенки, но и в ее непосредственной окрестности. В пересчете на одно

звено энергия доменных стенок, изображенных на рис. 8, равна  $E_{dw} = J/2$ . Подстановка этого значения в выражение для температуры перехода в модели Изинга на сотовой решетке (дуальной к треугольной) [177–179]

$$T_{dw} = \frac{E_{dw}}{\ln(2 + \sqrt{3})}$$

дает  $T_{dw} \approx 0,4J < T_v$ .

Обе эти оценки (как для  $T_{dw}$ , так и для  $T_v$ ) не учитывают, однако, взаимного влияния между образованием вихрей и доменных стенок, основную роль в котором играет то обстоятельство, что во всех местах, где угол между соседними сегментами доменной стенки отличен от  $2\pi/3$ , образуются дробные вихри с топологическими зарядами, равными  $\pm 1/3$  [28]. Как видно из рис. 7б, в отсутствие стенки или в случае, когда угол между образующими ее сегментами равен  $2\pi/3$ , узел треугольной решетки окружен тремя ячейками с положительными киральностями и тремя с отрицательными, что свидетельствует об отсутствии нескомпенсированной завихренности. В то же время, если угол между соседними сегментами стенки равен  $\pi/6$  или  $\pi$ , число ячеек с положительными киральностями не равно числу ячеек с отрицательными киральностями, что говорит о присутствии дробного вихря с ненулевым топологическим зарядом. Так же как и в случае квадратной решетки, появление на доменных стенках дробных вихрей приводит к невозможности реализации сценария с  $T_v > T_{dw}$ .

Рассмотрим доменную стенку, пересекающую всю систему. Ее энергия будет минимальной, если она: 1) не содержит дробных вихрей и 2) имеет минимальную длину. Если зафиксировать состояние с одной стороны от такой стенки, то равновесное состояние по другую сторону стенки может быть получено перестановкой значений  $\phi$  в двух из трех подрешеток с последующим поворотом всех фаз на  $\pi$  [28]. Три различных варианта перестановок соответствуют различным положениям стенки и отличаются друг от друга глобальным поворотом состояния за стенкой на  $\pm 2\pi/3$ . Это проиллюстрировано на рис. 8, где состояние слева от стенки является одним и тем же, а состояния справа от стенки переводятся друг в друга вращением на  $\pm 2\pi/3$ .

На пересекающей всю систему доменной стенке могут образовываться дефекты — перегибы (кинки), топологический заряд которых зависит от их высоты. Перегибы тройной высоты имеют нулевой топологический заряд и, соответственно, конечную энергию. В то же время из рис. 8 очевидно, что присутствие на доменной стенке перегиба минимальной высоты приводит к рассогласованию значений фазы на  $\pm 2\pi/3$  и, следовательно, такой перегиб представляет собой дробный вихрь с топологическим зарядом, равным по абсолютной величине  $1/3$ .

Логарифмическое взаимодействие таких дефектов в девять раз слабее взаимодействия обычных вихрей. Соответственно, фазовый переход, состоящий в диссоциации связанных пар простых перегибов и ведущий к потере когерентности между состояниями по обе стороны от стенки, должен происходить при температуре  $T_k$ , удовлетворяющей соотношению [24]

$$T_k = \frac{\pi}{9} \Gamma(T_k).$$

В случае треугольной решетки  $T_k$  оказывается даже ниже (по сравнению с  $T_v$ ), чем для квадратной решетки. Поэтому все выводы предыдущего раздела о свойствах доменных стенок в окрестности  $T_v$  применимы также и к антиферромагнитной XY модели на треугольной решетке. Следуя аргументации, представленной в разделе 4.4, можно заключить, что в антиферромагнитной XY модели на треугольной решетке фазовый переход, связанный с диссоциацией вихревых пар, также должен происходить при более низкой температуре, чем второй фазовый переход, связанный с разрушением дальнего порядка по антиферромагнитному упорядочению киральностей треугольных ячеек  $\sigma_R$  [24]. В промежуточной фазе, несмотря на наличие дальнего порядка по  $\sigma_R$ , корреляции  $S_j$  должны спасть (на больших расстояниях) экспоненциальным образом.

Хотя результаты ранних работ по численному моделированию не всегда позволяют заметить разницу между  $T_v$  и  $T_{dw}$  [29, 180], результаты более точных исследований [175, 181, 182] подтверждают заключение о  $T_v < T_{dw}$ . К сожалению, так же как в случае квадратной решетки, экспериментальное исследование треугольных решеток джозефсоновских контактов, находящихся в магнитном поле с полуцелым числом квантов потока на ячейку [162], производилось методами, не достаточными для идентификации температуры, при которой происходит упорядочение по киральностям.

## 5.2. Структура фазовой диаграммы во внешнем магнитном поле

При приложении внешнего магнитного поля в гамильтониане появляется дополнительное слагаемое, приводящее к нарушению симметрии по отношению к преобразованию (45):

$$H_{af} = J \sum_{(ij)} \cos(\varphi_i - \varphi_j) - h \sum_j \sin \varphi_j. \quad (46)$$

Здесь  $h$  — выраженная в энергетических единицах величина поля, которое предполагается направленным вдоль оси  $y$  (т.е. вертикально вверх). Это, однако, не приводит к снятию непрерывного вырождения основного состояния, которое и в присутствии поля сохраняет трехподрешеточную структуру [29].

В терминах единичных планарных спинов  $S_A$ ,  $S_B$  и  $S_C$ , принадлежащих к трем различным подрешеткам, энергия произвольного трехподрешеточного состояния  $E_3$ , которую мы будем полагать нормированной на число узлов решетки, оказывается зависящей только от их суммы:

$$E_3 = \frac{J}{2} [(S_A + S_B + S_C)^2 - 3] - \frac{h}{3} (S_A + S_B + S_C),$$

и минимальна при  $S_A + S_B + S_C = h/3J$ . Это означает, что минимизация  $E_3$  накладывает на величины  $\varphi_A$ ,  $\varphi_B$  и  $\varphi_C$  лишь два условия:

$$\sin \varphi_A + \sin \varphi_B + \sin \varphi_C = \frac{h}{3J}, \quad (47a)$$

$$\cos \varphi_A + \cos \varphi_B + \cos \varphi_C = 0, \quad (47b)$$

что и приводит к сохранению непрерывного вырождения основного состояния [29]. Вплоть до  $h = 3J$  пространство

вырождения представляет собой пару окружностей:  $Z_2 \times S^1$ , которые при  $h = 3J$  склеиваются в трех точках. При дальнейшем повышении  $h$  пространство вырождения перезапускается таким образом, что оказывается изоморфно единственной окружности, которая при  $h = 9J$  стягивается в точку [29]. При  $h \geq 9J$  основное состояние имеет тривиальный вид:  $\varphi_j = \pi/2$ , и не является вырожденным.

Поскольку при  $0 < h < 9J$  непрерывное вырождение носит случайный характер, т.е. не связано с симметрией гамильтониана, оно снимается при учете свободной энергии малых флуктуаций (спиновых волн) в окрестности основного состояния [30–32, 183]. Вычисление свободной энергии спиновых волн в рамках гармонического приближения позволяет продемонстрировать [32], что она является монотонно убывающей функцией от

$$U(\varphi_A, \varphi_B, \varphi_C) = \cos^2(\varphi_A - \varphi_B) + \cos^2(\varphi_B - \varphi_C) + \cos^2(\varphi_C - \varphi_A).$$

Таким образом, эффект от учета гармонических флуктуаций эквивалентен добавлению к (46) ферромагнитного биквадратного взаимодействия соседних спинов.

При  $0 < h < 3J$  минимум  $U(\varphi_A, \varphi_B, \varphi_C)$  достигается в тех из основных состояний, в которых спины в одной из трех подрешеток антипараллельны направлению поля [30, 31], например,

$$\varphi_A = -\frac{\pi}{2}, \quad \varphi_B = \Phi\left(\frac{h}{3J}\right), \quad \varphi_C = \pi - \Phi\left(\frac{h}{3J}\right), \quad (48)$$

где

$$\Phi(\gamma) = \arcsin \frac{1 + \gamma}{2}.$$

При больших же полях ( $3J < h < 9J$ ) минимум достигается в состояниях, в которых две из трех подрешеток эквивалентны друг другу [30, 31], например,

$$\varphi_A = -\pi + \Phi_1\left(\frac{h}{3J}\right), \quad \varphi_B = \varphi_C = \Phi_2\left(\frac{h}{3J}\right), \quad (49)$$

где

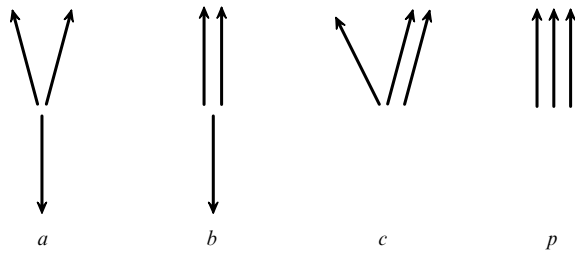
$$\Phi_1(\gamma) = \arcsin \frac{3 - \gamma^2}{2\gamma}, \quad \Phi_2(\gamma) = \arcsin \frac{3 + \gamma^2}{4\gamma}.$$

В обоих случаях непрерывное вырождение снимается таким образом, что полное вырождение редуцируется до шестикратного. При  $h \rightarrow 3J$  как уравнения (48), так и уравнения (49) воспроизводят решение

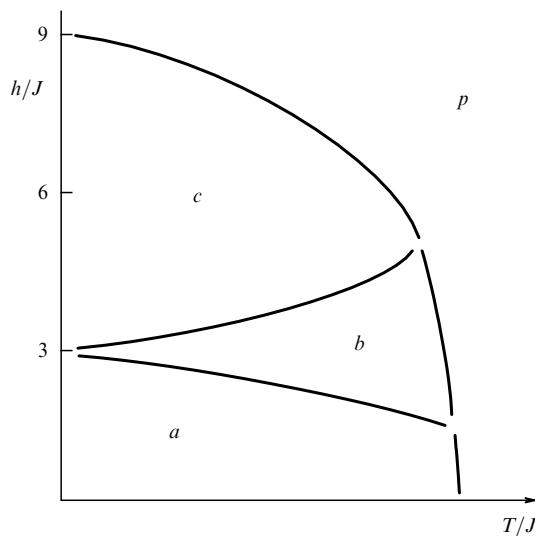
$$\varphi_A = -\frac{\pi}{2}, \quad \varphi_B = \varphi_C = \frac{\pi}{2}, \quad (50)$$

характеризующееся трехкратным вырождением. Структура трехподрешеточных основных состояний, минимизирующих  $U(\varphi_A, \varphi_B, \varphi_C)$  при различных значениях  $h$ , схематически показана на рис. 9, где предполагается, что магнитное поле направлено вертикально вверх.

Если, вместо того чтобы искать структуру основного состояния, минимизирующего  $U(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$ , минимизировать свободную энергию трехподрешеточного состояния, включающую в себя, помимо  $E_3$ , также и флуктуа-



**Рис. 9.** Направления спинов в трех подрешетках, минимизирующие свободную энергию гармонических флуктуаций:  $a$  — при  $h < 3J$ ,  $b$  — при  $h = 3J$ ,  $c$  — при  $3J < h < 9J$ ,  $p$  — при  $h \geq 9J$ .



**Рис. 10.** Структура фазовой диаграммы планарного антиферромагнетика с треугольной решеткой. Не показано слабое расщепление фазового перехода при  $h = 0$  и слабое расщепление перехода из  $c$  в  $p$ , которое должно иметь место по крайней мере при достаточно низких температурах.

ционный вклад:

$$F_3 = E_3 - gJU(\varphi_A, \varphi_B, \varphi_C),$$

где  $g \propto T/J$  — безразмерный малый параметр, описывающий относительную силу флуктуационных эффектов, интервал полей, в котором минимум гамильтониана достигается на решении (50), становится конечным. Ширина этого интервала оказывается пропорциональной  $g$ .

Отсюда следует, что фазовая диаграмма планарного антиферромагнетика с треугольной решеткой должна иметь структуру [31, 32], схематически показанную на рис. 10. Во всех трех упорядоченных фазах ( $a$ ,  $b$  и  $c$ ), присутствующих на фазовой диаграмме, имеется дальний порядок по ориентации спинов в каждой из трех подрешеток, при этом фазы обозначены таким образом, что направления  $\langle \mathbf{S} \rangle$  для трех подрешеток соответствуют показанным на рис. 9. Фазы  $a$  и  $c$  характеризуются шестикратным вырождением, фаза  $b$  — трехкратным, а  $p$  — это неупорядоченная (парамагнитная) фаза. Впервые подобная фазовая диаграмма, содержащая три различных упорядоченных фазы, была построена при численном моделировании [29], тогда как анализ по среднему полю приводит к иной (гораздо более простой) структуре фазовой диаграммы [176].

Фазовые переходы из фазы  $a$  или фазы  $c$  в фазу  $b$  должны иметь изинговскую природу, поскольку связаны с появлением бесконечных доменных стенок, приводящих к перемешиванию двух из шести вырожденных состояний [32]. Фаза  $b$  представляет собой соизмеримый кристалл  $\sqrt{3} \times \sqrt{3}$  антипараллельных полю спинов на фоне параллельных. Из результатов точного решения модели жестких шестиугольников [184] следует, что фазовый переход, связанный с плавлением такой структуры при повышении температуры, относится к классу универсальности трехпозиционной модели Поттса.

При полях, приближающихся снизу к  $9J$ , значения  $\varphi_A$ ,  $\varphi_B$  и  $\varphi_C$ , удовлетворяющие уравнениям (47), могут быть представлены в виде [135]

$$\varphi_A \approx \frac{\pi}{2} + \Phi_0 \sin \chi,$$

$$\varphi_B \approx \frac{\pi}{2} + \Phi_0 \sin \left( \chi + \frac{2\pi}{3} \right),$$

$$\varphi_C \approx \frac{\pi}{2} + \Phi_0 \sin \left( \chi - \frac{2\pi}{3} \right),$$

где

$$\Phi_0 = 2 \left( 1 - \frac{h}{9J} \right)^{1/2},$$

благодаря чему система может быть аппроксимирована при помощи обычной (не фрустрированной) XY модели с анизотропией шестого порядка, связанной со свободной энергией флуктуаций [32]. Из результатов ренормгруппового анализа для такой XY модели [76, 185] следует, что по крайней мере часть линии перехода из фазы  $c$  в неупорядоченную фазу  $p$  должна расщепиться, при этом оба перехода будут относиться к классу универсальности БКТ. В промежуточной фазе анизотропия оказывается несущественной, что приводит к алгебраическому спадаанию корреляций вместо настоящего дальнего порядка, однако вихри вспомогательной переменной  $\chi$  образуют связанные пары. Из сравнения со структурой фазовой диаграммы [186, 187] шестипозиционной кубической модели [188, 189] следует, что нерасщепленная часть линии переходов из  $c$  в  $p$ , равно как и нерасщепленная часть линии переходов из  $a$  в  $p$ , соответствует переходам первого рода, аналогичным фазовому переходу в шестипозиционной модели Поттса [190].

Чубуков и Голосов показали [191], что учет квантовых флуктуаций (в приближении большого, по сравнению с единицей, спина) не приводит к каким-либо неожиданным изменениям. Квантовые флуктуации играют ту же самую роль, что и термодинамические, т.е. приводят к стабилизации тех же самых состояний. Вследствие этого интервал полей, в котором существует фаза  $b$ , оказывается конечным уже при нулевой температуре. Эти выводы подтверждаются результатами численного моделирования квантовой антиферромагнитной XY модели со спином  $1/2$  [192].

Интересно, что в случае находящегося во внешнем магнитном поле *гейзенберговского* антиферромагнетика с треугольной решеткой учет термодинамических [193] или квантовых [191, 194] флуктуаций приводят к стабилизации упорядоченных фаз с точно такой же структурой, как и в случае планарного антиферромагнетика.

Иначе говоря, при наличии флуктуаций наиболее выгодным оказывается состояние, в котором спины в трех подрешетках лежат в одной плоскости (параллельной направлению магнитного поля), при этом ориентации спинов в различных подрешетках оказываются такими же, как на рис. 9. Трехподрешеточные фазы с аналогичной структурой стабилизируются как термодинамическими [195], так и квантовыми [196] флуктуациями в антиферромагнетиках с решеткой кагоме (рис. 11а), что подтверждается результатами численных расчетов [196, 197].

Характерной особенностью промежуточной фазы *b* является гораздо более слабая зависимость намагниченности от приложенного магнитного поля, чем в окружающих ее с обеих сторон фазах *a* и *c* [191]. Подобное поведение намагниченности при изменении поля наблюдалось в таких антиферромагнетиках, состоящих из слабо связанных треугольных слоев, как  $\text{EuC}_6$  [198], а также  $\text{RbFe}(\text{MoO}_4)_2$  [199, 200] и  $\text{Cs}_2\text{CuVg}_4$  [201], в которых анизотропия является легкоплоскостной. При этом фазовая диаграмма  $\text{RbFe}(\text{MoO}_4)_2$ , построенная в [199, 200], практически полностью воспроизводит структуру фазовой диаграммы, показанной на рис. 10. Треугольная решетка является типичной для адсорбированного монослоя, образующего двумерный кристалл.

## 6. Планарный антиферромагнетик с решеткой кагоме

Решетка кагоме представляет собой треугольную решетку, из которой регулярным образом удалена четверть узлов (рис. 11а). Она включает в себя два типа ячеек: треугольные и шестиугольные.

Существует целый ряд слоистых антиферромагнетиков, в которых магнитные ионы образуют слабо связанные между собой слои с решеткой кагоме. В их число в первую очередь входят ярозиты [202–206], описываемые формулой  $\text{MFe}_3(\text{OH})_6(\text{SO}_4)_2$  (где  $\text{M} = \text{H}_3\text{O}, \text{Na}, \text{K},$

$\text{Rb}, \text{Ag}, \text{NH}_4, \text{Tl}, \text{Pb}, \text{Hg}$ ), и их хромовые аналоги  $\text{KFe}_3(\text{OH})_6(\text{CrO}_4)_2$ , а также  $\text{SrCr}_{8-x}\text{Ga}_{4+x}\text{O}_{19}$  (SCGO) [207–211] и  $\text{Ba}_2\text{Sn}_2\text{ZnGa}_3\text{Cr}_7\text{O}_{22}$  (QS-феррит) [212]. Некоторые из этих веществ характеризуются наличием легкоплоскостной анизотропии. Об этом, в частности, свидетельствуют данные по восприимчивости  $\text{H}_3\text{OFe}_3(\text{OH})_6(\text{SO}_4)_2$  [206].

Объектом экспериментальных исследований являются также сетки из сверхпроводящих проволок с геометрией решетки кагоме [111, 213]. При величине внешнего магнитного поля, соответствующей полуполному числу квантов потока на элементарную треугольную ячейку (и, соответственно, целому числу квантов потока на шестиугольную ячейку), фазовые флуктуации в такой системе также могут быть описаны при помощи антиферромагнитной XY модели.

### 6.1. Основные состояния

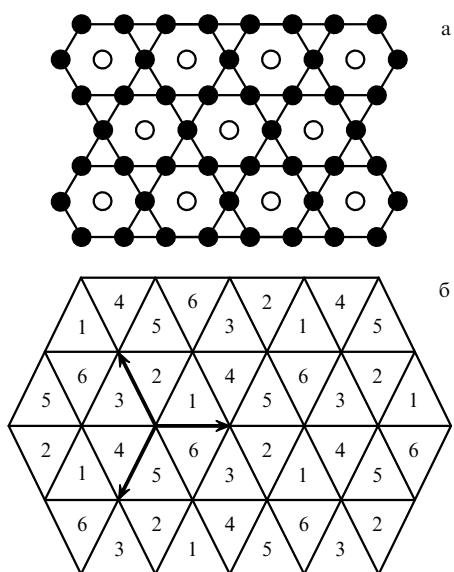
Так же как и в случае треугольной решетки, основные состояния планарного антиферромагнетика с решеткой кагоме и взаимодействием только ближайших соседей можно построить исходя из того, что минимум энергии любой треугольной ячейки достигается тогда, когда принадлежащие ей спины образуют между собой угол  $2\pi/3$ . Вследствие этого в каждом из основных состояний все переменные  $\varphi_j$  принимают только три различных значения:

$$\varphi_A = \Phi, \quad \varphi_B = \Phi + \frac{2\pi}{3}, \quad \varphi_C = \Phi - \frac{2\pi}{3},$$

причем любая из треугольных ячеек должна содержать какую-либо перестановку всех трех этих значений, что позволяет сопоставить [35, 214] такие состояния основным состояниям трехпозиционной антиферромагнитной модели Поттса на такой же решетке.

Из точного решения, найденного Бакстером [215], известно, что основное состояние антиферромагнитной трехпозиционной модели Поттса на решетке кагоме характеризуется весьма развитым вырождением, при котором число основных состояний экспоненциально растет с ростом числа узлов в системе, что соответствует конечному значению остаточной энтропии в расчете на узел. Как и в случае модели Поттса, аналогичное вырождение основного состояния антиферромагнитной XY модели на решетке кагоме не связано с симметрией гамильтониана. Оно сохраняется и при изменении вида взаимодействия ближайших соседей.

Дискретное вырождение набора основных состояний антиферромагнитной XY модели на решетке кагоме удобно описывать в терминах образования доменных стенок с нулевой энергией [34]. Рассмотрим так называемое  $\sqrt{3} \times \sqrt{3}$  состояние [216] (рис. 12а), структура которого соответствует структуре основного состояния на треугольной решетке. Другое состояние с той же энергией может быть образовано при помощи перестановки, например, вида  $\varphi_B \leftrightarrow \varphi_C$  внутри любой замкнутой петли, образованной узлами с  $\varphi_j = \varphi_A$ , и т.п. Замкнутая петля (простейший пример которой приведен на рис. 12в) может рассматриваться как доменная стенка с нулевой энергией, разделяющая два различных  $\sqrt{3} \times \sqrt{3}$  состояния. Все подобные доменные стенки представляют собой ломаные линии, в которых соседние звенья образуют друг с другом угол  $\pm 2\pi/3$  (рис. 12г). Естественно, они могут быть и незамкнутыми, т.е. бесконечными.



**Рис. 11.** (а) Решетка кагоме; (б) треугольная решетка  $T_a$  и три ее базисных вектора  $\mathbf{a}_i$ . Узлы дуальной решетки  $\mathcal{H}_a$  обозначены цифрами от 1 до 6. Одинаковые цифры соответствуют физически эквивалентным состояниям.

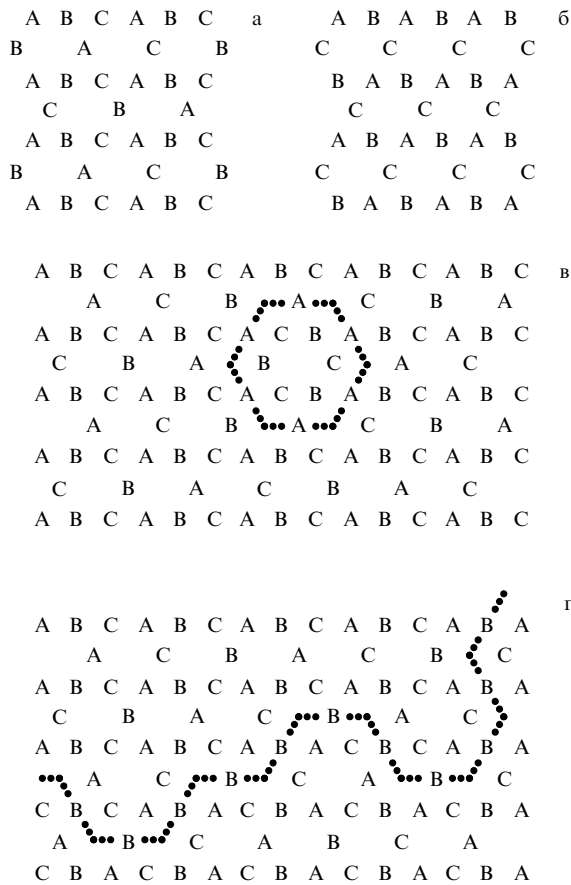


Рис. 12. (а)  $\sqrt{3} \times \sqrt{3}$  состояние; (б)  $\mathbf{q} = 0$  состоянии; (в, г) доменные стенки, разделяющие два различных  $\sqrt{3} \times \sqrt{3}$  состояния.

Вырождение, выражающееся в возможности построения доменных стенок с нулевой энергией, не связано с симметрией гамильтониана и устраняется при включении в рассмотрение взаимодействия более далеких соседей. Для снятия этого случайного вырождения оказывается достаточным учесть взаимодействие следующих за ближайшими соседями, которое мы будем характеризовать константой связи  $J_2$ . При ферромагнитном характере взаимодействия следующих за ближайшими соседями ( $J_2 < 0$ ) основным состоянием является  $\sqrt{3} \times \sqrt{3}$  состояние [216], структура которого показана на рис. 12а. Оно характеризуется "антиферромагнитным" упорядочением киральностей треугольных ячеек, при этом энергия доменных стенок  $E_{dw}$  становится положительной.

При дальнейшем анализе мы ограничимся предельным случаем  $|J_2| \ll J_1$  (где  $J_1 > 0$  — константа связи, описывающая взаимодействие соседних спинов), когда в пересчете на одно звено  $E_{dw} \approx 3|J_2|$ . Поскольку каждое звено доменной стенки разделяет две треугольные ячейки с одинаковыми киральностями, можно сказать, что взаимодействие следующих за ближайшими соседями на решетке кагоме индуцирует пропорциональное ему взаимодействие киральностей соседних треугольных ячеек, имеющее противоположный знак.

При антиферромагнитном характере взаимодействия следующих за ближайшими соседями ( $J_2 > 0$ ) наименьшей энергией обладает так называемое  $\mathbf{q} = 0$  состояние [216], схематически показанное на рис. 12б. Оно характери-

зуется "ферромагнитным" упорядочением киральностей треугольных ячеек. При обоих знаках  $J_2$  вырождение основного состояния редуцируется до  $U(1) \times Z_2$  [33].

## 6.2. Нультемпературные флуктуации

Как упоминалось выше, при учете взаимодействия только ближайших соседей набор основных состояний антиферромагнитной XY модели на решетке кагоме оказывается таким же, как и в трехпозиционной антиферромагнитной модели Поттса на той же решетке. Известно, что возможно построить отображение этого набора основных состояний на набор состояний SOS модели, в которой определенные в центрах шестиугольных ячеек переменные  $\mathbf{n}_R$ , имеющие смысл "высот" поверхности, являются векторными [35]. На рисунке 11а узлы  $\mathbf{R}$ , в которых определены переменные  $\mathbf{n}_R$ , обозначены светлыми кружками. Они образуют треугольную решетку, которую мы будем обозначать  $\mathcal{T}$ . Каждый узел  $\mathbf{j}$  решетки кагоме может быть сопоставлен связи ( $\mathbf{R}\mathbf{R}'$ ) решетки  $\mathcal{T}$ , а каждая переменная  $\varphi_j = \varphi_A, \varphi_B, \varphi_C$  — принимающей три значения поттсовской переменной  $\alpha_{\mathbf{R}\mathbf{R}'} \equiv \alpha_{\mathbf{R}'\mathbf{R}}$ , определенной на этой связи.

Поскольку каждая треугольная ячейка решетки кагоме должна содержать три различные переменные  $\varphi_A, \varphi_B$  и  $\varphi_C$ , они могут быть сопоставлены трем базисным векторам  $\mathbf{a}_x$  ( $\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_3 = 0$ ) некоторой вспомогательной треугольной решетки (рис. 11б), которую мы будем обозначать  $\mathcal{T}_a$ . Переменные  $\mathbf{n}_R$ , принимающие значения, определенные на  $\mathcal{T}_a$ , можно тогда ввести, следуя правилу

$$\mathbf{n}_{\mathbf{R}'} = \begin{cases} \mathbf{n}_{\mathbf{R}} + \mathbf{a}_{\alpha_{\mathbf{R}\mathbf{R}'}} & \mathbf{R}' = \mathbf{R} + \mathbf{e}_x, \\ \mathbf{n}_{\mathbf{R}} - \mathbf{a}_{\alpha_{\mathbf{R}\mathbf{R}'}} & \mathbf{R}' = \mathbf{R} - \mathbf{e}_x, \end{cases} \quad (51)$$

где  $\mathbf{e}_x$  — три базисных вектора решетки  $\mathcal{T}$  ( $\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3 = 0$ ). Это и определяет соответствие между состояниями антиферромагнитной модели Поттса и векторной SOS модели, в которой имеющие смысл высот переменные  $\mathbf{n}_R \in \mathcal{T}_a$  должны удовлетворять условию

$$|\mathbf{n}_{\mathbf{R}} - \mathbf{n}_{\mathbf{R}'}| = a, \quad (52)$$

на всех связях решетки  $\mathcal{T}$ . Здесь  $a \equiv |\mathbf{a}_x|$  — постоянная решетки для решетки  $\mathcal{T}_a$ .

Используя известные свойства точного решения [215] трехпозиционной антиферромагнитной модели Поттса во внешнем поле, стабилизирующем антиферромагнитное упорядочение по киральностям, Хьюз и Рутенберг продемонстрировали [35], что в описанной выше векторной SOS модели (в статсумму которой все разрешенные конфигурации входят с одинаковыми весами) корреляционная функция  $\langle (\mathbf{n}_{\mathbf{R}} - \mathbf{n}_{\mathbf{R}'})^2 \rangle$  при  $|\mathbf{R} - \mathbf{R}'| \rightarrow \infty$  ведет себя как

$$\langle (\mathbf{n}_{\mathbf{R}} - \mathbf{n}_{\mathbf{R}'})^2 \rangle \approx \frac{3a^2}{\pi^2} \ln |\mathbf{R} - \mathbf{R}'|.$$

Это означает, что эта модель находится точно в точке фазового перехода из шероховатой в гладкую фазу. Поэтому можно ожидать, что любое дополнительное возмущение, ведущее к уменьшению флуктуаций, сдвинет систему из точки перехода в гладкое состояние, в котором флуктуации  $n_{\mathbf{R}}$  не являются расходящимися.

Согласно условию (52) значения переменных  $\mathbf{n}_R$  в соседних узлах должны всегда отличаться друг от друга, поэтому даже максимально гладкое состояние "поверхности" будет представлять собой регулярное чередование трех различных значений  $\mathbf{n}_R$ . В такой ситуации фазовый переход в гладкую фазу более естественно описывать в терминах переменных

$$\mathbf{u}_r \equiv \frac{1}{3} (\mathbf{n}_R + \mathbf{n}_{R'} + \mathbf{n}_{R''}),$$

представляющих собой среднее арифметическое значений переменных  $\mathbf{n}_R$  в трех узлах решетки  $T$ , принадлежащих одной и той же треугольной ячейке. Переменные  $\mathbf{u}_r$  можно считать определенными в узлах  $\mathbf{r}$  сотовой решетки  $\mathcal{H}$ , дуальной к  $T$ , и принимающими значения  $\mathbf{u}_r \in \mathcal{H}_a$ , где  $\mathcal{H}_a$  — сотовая решетка, дуальная к  $T_a$  (рис. 11б).

В терминах исходных спиновых переменных  $\mathbf{S}_j \equiv (\cos \varphi_j, \sin \varphi_j)$  гладкие состояния векторной SOS модели (в которых все переменные  $\mathbf{u}_r$  равны друг другу) соответствуют  $\sqrt{3} \times \sqrt{3}$  состояниям, а ступеньки с нулевой энергией, флуктуационное возникновение которых приводит к тому, что поверхность находится в шероховатом состоянии, — доменным стенкам с нулевой энергией (типа показанных на рис. 12в, г), разделяющим различные  $\sqrt{3} \times \sqrt{3}$  состояния. При этом логарифмическая расходимость корреляций  $\mathbf{n}_R$  (или  $\mathbf{u}_r$ ) соответствует степенному спадаанию корреляций  $\mathbf{S}_j$ .

Крупномасштабные свойства векторной SOS модели (а также дальнейших ее обобщений) удобно анализировать при помощи многокомпонентной версии модели синус-Гордона с той же симметрией [34]. Обезразмеренный гамильтониан такой модели может быть выбран в виде

$$H_{SG} = \int d^2\mathbf{r} \left\{ \frac{KQ^2}{2} [\nabla \mathbf{u}(\mathbf{r})]^2 + y \sum_{\alpha=1}^3 \cos [\mathbf{Q}_\alpha \mathbf{u}(\mathbf{r})] \right\}. \quad (53)$$

Первое слагаемое в (53) описывает эффективную жесткость (энтропийного происхождения), связанную с флуктуациями  $\mathbf{u}(\mathbf{r})$ , тогда как второе слагаемое делает предпочтительными значения  $\mathbf{u}(\mathbf{r})$ , принадлежащие  $\mathcal{H}_a$ . Здесь  $\mathbf{Q}_\alpha$  — три базисных вектора треугольной решетки, обратной к  $T_a$ , так что

$$\mathbf{Q}_\alpha^2 = \frac{16\pi^2}{3a^2}, \quad \mathbf{Q}_1 + \mathbf{Q}_2 + \mathbf{Q}_3 = 0.$$

Аналогичный гамильтониан (с противоположным знаком второго слагаемого) и эквивалентный ему векторный кулоновский газ исследовались Нельсоном [217] в связи с задачей о плавлении двумерного кристалла с треугольной решеткой. И хотя позднее было установлено [9–11], что задача о плавлении должна описываться несколько более сложным гамильтонианом, в который вкладываются, связанные со сжатием и сдвигом входят различным образом (а не в виде инвариантной комбинации), в рассматриваемой нами задаче смещение  $\mathbf{u}$  имеет место в некотором абстрактном пространстве, никак не связанном с реальным пространством, что действительно позволяет ввести лишь один упругий модуль, как это и предполагается в (53).

В наших обозначениях ренормгрупповые уравнения, описывающие эволюцию  $K$  и  $y$  при изменении масштаба

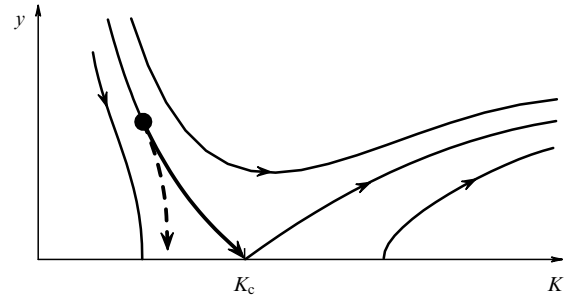


Рис. 13. Ренормгрупповая диаграмма для уравнений (54). Система со взаимодействием только соседних спинов и  $T = 0$  может быть сопоставлена некоторой точке, принадлежащей левой сепаратрисе. Штриховой стрелкой показано направление потока при  $T > 0$ , когда следует учесть пропорциональный  $z^2$  отрицательный вклад в правую часть (54а).

[217], могут быть переписаны как

$$\frac{dK}{dl} = \frac{3\pi}{8} y^2, \quad (54a)$$

$$\frac{dy}{dl} = \left( 2 - \frac{1}{4\pi K} \right) y - \pi y^2, \quad (54b)$$

где  $l$  — логарифм масштаба. Соответствующая ренормгрупповая диаграмма схематически изображена на рис. 13, где  $K_c \equiv 1/8\pi$ . Из вида уравнений (54) следует, что фазовый переход из гладкой в шероховатую фазу происходит тогда, когда перенормированное значение  $K$  сравнивается с  $K_c$ . Это означает, что введенная выше векторная SOS модель (которая, как установлено в [35], находится в точке фазового перехода) может быть сопоставлена [34] одной из точек, принадлежащих левой сепаратрисе.

### 6.3. Флуктуации при конечной температуре

При конечной температуре становятся возможными и иные типы флуктуаций, которые в отличие от нультемпературных флуктуаций, рассмотренных в предыдущем разделе, требуют затрат энергии. В частности, речь может идти об образовании вихрей, которые при низких температурах должны быть связаны в пары малого размера. Наряду с обычными вихрями (с целым топологическим зарядом) в системе оказывается возможным образование также и дробных вихрей с топологическим зарядом  $\pm 1/3$  [35], локализованных на доменных стенках в тех точках, где соседние сегменты стенки образуют угол, отличный от  $2\pi/3$  [34] (аналогично тому, как это имеет место в случае треугольной решетки; см. раздел 5.1).

На рисунке 14а показана доменная стенка, содержащая одну такую точку. Она разделяет эту стенку на две части — верхнюю, образованную узлами С, и нижнюю, образованную узлами В. Из рисунка видно, что при пересечении верхней части доменной стенки состояние справа от стенки должно отличаться от состояния слева от стенки перестановкой  $\varphi_A$  и  $\varphi_B$ , тогда как состояние, возникающее при пересечении нижней части доменной стенки должно отличаться от состояния слева перестановкой  $\varphi_A$  и  $\varphi_C$ . Это приводит к рассогласованию значений фазы на  $2\pi/3$ , которое, например, может быть локализовано на линии  $X-Y-Z$ . Естественно, минимум энергии достигается, когда вместо скачка на  $2\pi/3$  на этой линии фаза плавным образом меняется на  $2\pi/3$  при

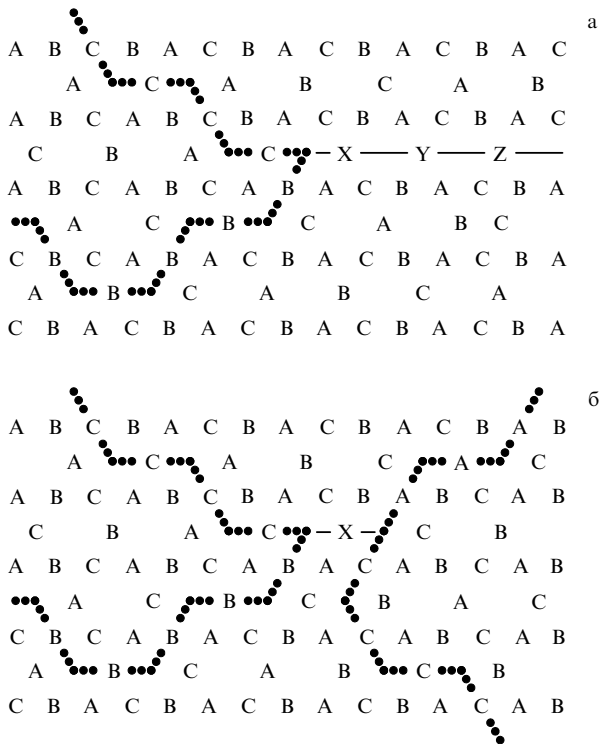


Рис. 14. Примеры топологических дефектов на фоне  $\sqrt{3} \times \sqrt{3}$  состояния: (а) дробный вихрь, (б) дислокация, представляющая собой нейтральную пару дробных вихрей.

обходе вокруг особой точки, что и означает появление дробного вихря с топологическим зарядом, абсолютная величина которого равна  $1/3$ .

При низких температурах все дробные вихри должны быть связаны в нейтральные пары. Пример такой пары приведен на рис. 14б. При повышении температуры должна происходить диссоциация пар дробных вихрей [35, 218, 219].

Если бы дробные вихри существовали независимо от доменных стенок, это происходило бы при температуре  $T_{fv}$ , удовлетворяющей соотношению

$$T_{fv} = \frac{\pi}{18} \Gamma(T_{fv}), \quad (55)$$

аналогичному соотношению (37). Поскольку в любом из вырожденных основных состояний  $\Gamma = (\sqrt{3}/4)J_1$ , это дает для  $T_{fv}$  оценку [34]

$$T_{fv} \leq \frac{\pi\sqrt{3}}{72} J_1 \approx 0,0756 J_1, \quad (56)$$

которая находится в хорошем согласии со значениями температуры фазового перехода,  $T_{fv} \approx (0,070 - 0,076) J_1$ , следующими из результатов численного моделирования [220]. В [221] эта же оценка для  $T_{fv}$  была получена существенно более сложным способом, основанном на использовании дуального преобразования.

Сравнение правила (51) с рис. 14а позволяет убедиться, что в терминах векторной SOS модели, введенной в предыдущем разделе, каждый дробный вихрь соответствует точке, при обходе вокруг которой переменная  $\mathbf{u}$  изменяется на  $\Delta\mathbf{u}$ , где  $|\Delta\mathbf{u}| = a$ . Это означает, что каждый дробный вихрь представляет собой точку, где начинается

или заканчивается ступенька высотой  $\Delta\mathbf{u}$  (или, в более общем случае, набор ступенек с суммарной высотой  $\Delta\mathbf{u}$ ). Соответственно, флуктуации SOS модели приведут к дополнительному вкладу во взаимодействие дробных вихрей, связанному с разницей в энтропии между состояниями с различными положениями точек окончания ступеней [34]. Во всей шероховатой фазе (включая точку перехода в гладкое состояние) это дополнительное взаимодействие, которое может быть выражено через корреляционную функцию некоторой новой XY модели, дуальной к SOS модели [90, 91], также является логарифмическим. Его наличие ведет к некоторому увеличению  $T_{fv}$  и относительному ослаблению взаимного влияния между дробными и обычными вихрями. Из сравнения с [222] следует, что в принципе такое взаимодействие могло бы привести к появлению дополнительного фазового перехода, связанного с диссоциацией пар обычных вихрей и происходящего при  $T_v > T_{fv}$ . Этого, однако, не происходит из-за того, что величина энтропийного взаимодействия дробных вихрей является достаточно слабой [34].

С другой стороны, при  $T > 0$  теряется строгая эквивалентность с SOS моделью [34]. Напомним, что бесконечное множество различных "гладких" состояний SOS модели в терминах спиновых переменных соответствуют (для данного  $\phi_A$ ) всего лишь шести различным  $\sqrt{3} \times \sqrt{3}$  состояниям, которые могут быть получены из состояния, показанного на рис. 12а, при помощи всех возможных перестановок А, В и С. На рисунке 11б узлы решетки  $\mathcal{H}_a$ , которые в терминах исходных фазовых переменных  $\phi_j$  соответствуют одним и тем же состояниям, обозначены одинаковыми цифрами.

При нулевой температуре специфические свойства доменных стенок с нулевой энергией, разделяющих такие состояния (в частности, две замкнутые доменные стенки не могут пересекаться друг с другом), позволяют трактовать их как неэквивалентные состояния SOS модели. Аналогичная ситуация имеет место при использовании шестивершинной модели сегнетоэлектрика (модели льда [93]) для построения SOS модели грани (001) кристалла с объемно-центрированной кубической решеткой [92].

При конечной температуре у набора доменных стенок, разделяющих два физически эквивалентных состояния, появляется возможность слиться друг с другом и исчезнуть. Подобные точечные дефекты хорошо известны в теории перехода из соизмеримого в несоизмеримое состояние [223]. Собственная энергия  $E_d$  такого дефекта конечна и пропорциональна  $J_1$ :

$$E_d = c_d J_1,$$

где  $c_d$  порядка единицы.

В терминах многокомпонентной модели синус-Гордона (53) такие дефекты соответствуют дислокациям поля  $\mathbf{u}$ , векторы Бюргерса которых  $\mathbf{b}_\alpha$  ( $\alpha = 1, 2, 3$ ), как это следует из рис. 11б, имеют вид

$$\mathbf{b}_1 = \mathbf{a}_3 - \mathbf{a}_2, \quad \mathbf{b}_2 = \mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_3, \quad \mathbf{b}_3 = \mathbf{a}_2 - \mathbf{a}_1.$$

Пример такой дислокации показан на рис. 14б. Она образована нейтральной парой дробных вихрей, локализованных на двух различных доменных стенках, не являющихся продолжением друг друга. Символом X



обозначен узел, на котором  $\varphi_j \approx (\varphi_A + \varphi_B)/2$ . В окрестности этого узла значения  $\varphi_j$  слегка отклоняются от подразумеваемых обозначениями А, В и С. Последовательное применение правила (51) вдоль периметра любого замкнутого контура, окружающего точку X, приводит к  $\Delta \mathbf{n} = \mathbf{a}_2 - \mathbf{a}_1$ .

Ренормировка химической активности дислокации  $z = \exp(-c_d J_1/T)$  при изменении масштаба описывается уравнением [9, 10]

$$\frac{dz}{dl} = \lambda_z z + 2\pi z^2,$$

где

$$\lambda_z = 2 - \frac{KQ^2 b^2}{4\pi} \equiv 2 - 4\pi K.$$

В окрестности перехода шероховатости ( $K \approx K_c = 1/8\pi$ ) индекс  $\lambda_z$ , описывающий перенормировку  $z$ , близок к  $\lambda_z^0 = 3/2$ , что соответствует быстрому росту  $z$ . Сравнение  $\lambda_z$  с  $\lambda_y = 2 - 1/(4\pi K)$  показывает, что  $y$  и  $z$  не могут одновременно ренормироваться в нуль. В этом смысле ситуация совершенно аналогична возникающей при анализе обычной (ферромагнитной) XY модели со слабой анизотропией не слишком высокого порядка [76, 185].

Присутствие дислокаций (или, точнее говоря, дислокационных пар) приводит к появлению в правой части (54а) дополнительного отрицательного слагаемого, пропорционального  $z^2$ . Наличие такого слагаемого сдвигает поток с сепаратрисы в область, соответствующую шероховатой фазе SOS модели [34].

С другой стороны, неограниченный рост  $z$  при ренормировке означает, что в системе появится конечная концентрация свободных дислокаций, что превратит шероховатую фазу SOS модели в неупорядоченную фазу модели с шестью состояниями. В такой фазе спадание корреляций характеризуется конечным корреляционным радиусом  $\xi_z$ , который может быть найден как масштаб, на котором ренормированное значение  $z$  становится порядка единицы.

Корреляционный радиус  $\xi_z$  определяет масштаб, на котором экранируется дополнительное (энтропийное) взаимодействие дробных вихрей, связанное с флуктуациями доменных стенок. Конечность  $\xi_z$  устраняет даже гипотетическую возможность того, что диссоциация пар обычных вихрей будет происходить как независимый фазовый переход при  $T_v > T_{fv}$ .

#### 6.4. Фазовый переход,

##### связанный с упорядочением по киральностям

Как уже отмечалось, ферромагнитное взаимодействие следующих за ближайшими соседями приводит к тому, что энергия доменных стенок, аналогичных показанным на рис. 12в, г, становится конечной:  $E_{dw} \approx 3|J_2|$ . Обычно  $T_{dw}$  — температуру фазового перехода, связанного с появлением бесконечных доменных стенок, можно оценить, сравнивая энергетический и энтропийный вклады в свободную энергию стенки [224, 225], что в рассматриваемой ситуации привело бы к  $T_{dw} \propto |J_2|$ . Однако такой подход не учитывает, что появление бесконечной стенки приводит к дополнительному уменьшению энтропии из-за того, что создает препятствия для появления флуктуационно образующихся замкнутых доменных стенок, и поэтому не всегда приводит к правильному ответу.

В терминах векторной SOS модели конечная величина  $E_{dw}$  (т.е. энергии ступени) вызывает сдвиг системы из точки перехода шероховатости в гладкую фазу. С другой стороны, появление при конечной температуре свободных дислокаций способствует сдвигу в противоположную сторону, т.е. в неупорядоченную фазу. Ренорм-групповой анализ, учитывающий конкуренцию двух этих эффектов [34], приводит к выводу, что в пределе  $|J_2|/J_1 \rightarrow 0$

$$T_{dw} \sim J_1 \left( \frac{E_{dw}}{J_1} \right)^{3/8} \propto J_1^{5/8} |J_2|^{3/8}, \quad (57)$$

тогда как при увеличении отношения  $|J_2|/J_1$  происходит переход в режим, в котором значение индекса в (57) меняется с 3/8 на 1/2, что может быть показано при помощи самосогласованного приближения, аналогичного введенному в [226].

Низкотемпературная фаза, существующая при  $T < T_{dw}$ , характеризуется наличием настоящего дальнего порядка по антиферромагнитному упорядочению киральностей треугольных ячеек и степенным спаданием корреляций спинов, т.е. корреляционной функции  $\langle \exp[i(\varphi_{j+r} - \varphi_j)] \rangle$ , связанным в первую очередь с существованием спиновых волн.

Следует подчеркнуть, что уравнение (57) выведено в предположении, что все дробные вихри связаны в пары, и, соответственно, справедливо лишь при  $T_{dw} < T_{fv}$ . С другой стороны, диссоциация пар дробных вихрей возможна лишь при  $T > T_{dw}$ , поскольку при  $T < T_{dw}$  дробные вихри, помимо логарифмического взаимодействия, связаны друг с другом также и доменными стенками, обладающими конечной свободной энергией на единицу длины. Поэтому сценарий с  $T_{dw} > T_{fv}$  оказывается невозможным, а диссоциация пар дробных вихрей происходит либо при более высокой температуре, чем появление бесконечных доменных стенок, либо одновременно с ним.

Появление сетки из доменных стенок ведет к перемешиванию шести основных состояний, которые могут быть получены из состояния, показанного на рис. 12а, при помощи всех возможных перестановок А, В и С, поэтому связанный с этим фазовый переход не должен относиться к изинговскому классу универсальности. Построение шестипозиционной модели с такой же статистикой доменных стенок [28, 34] приводит к модели, связанной соотношением дуальности [227–229] с шестипозиционной кубической моделью, в которой, как известно, фазовый переход (в случае, если он один) происходит первым родом [186, 187]. Следовательно, и в рассматриваемой задаче фазовый переход при  $T = T_{dw}$  должен происходить первым родом по крайней мере при  $T_{dw} < T_{fv}$ , а скорее всего и при больших значениях  $E_{dw}$ , когда непрерывные и дискретные степени свободы одновременно становятся разупорядоченными.

Сравнение (55) и (57) показывает, что выполнение соотношения  $T_{dw} < T_{fv}$  возможно лишь при  $-J_{\max} < J_2 < 0$ , где  $J_{\max}$  порядка  $10^{-3}J_1$  [34]. При  $J_2 < -J_{\max}$  в системе будет происходить единственный фазовый переход, при котором возникновение бесконечных доменных стенок вызывает появление свободных вихрей всех возможных типов. В этом случае диссоциация пар дробных вихрей происходит из-за зануления линейного вклада в их взаимодействие (связанного со

свободной энергией соединяющих их доменных стенок), в то время как логарифмический вклад во взаимодействие слишком слаб, чтобы удержать такие пары в связанном состоянии. Поэтому можно ожидать, что значение модуля жесткости в точке перехода будет неуниверсальным:

$$\frac{2}{\pi} < \frac{\Gamma(T_c)}{T_c} < \frac{18}{\pi}.$$

Подчеркнем, что приведенная выше оценка для  $J_{\max}$  была получена при пренебрежении численными коэффициентами, которые могут содержаться в соотношении (57), так что должна восприниматься с некоторой осторожностью.

В промежуточной фазе, т.е. при  $T_{dw} < T < T_{fv}$ , как корреляции спинов  $S_j$ , так и корреляции киральностей треугольных ячеек спадают экспоненциальным образом, однако корреляционная функция  $\langle \exp [3i(\varphi_{j+r} - \varphi_j)] \rangle$  характеризуется степенным спаданием [35]. При диссоциации пар дробных вихрей закон спадания  $\langle \exp [3i(\varphi_{j+r} - \varphi_j)] \rangle$  меняется на экспоненциальный.

При антиферромагнитном характере взаимодействия следующих за ближайшими соседями ( $J_2 > 0$ ) минимум энергии достигается в одном из  $\mathbf{q} = 0$  состояний с ферромагнитным упорядочением киральностей треугольных ячеек [216] (рис. 12б). Понятно, что дискретное вырождение такого состояния также является двукратным.

Как и в предыдущем случае, это состояние допускает построение доменной стенки, энергия которой (в пересчете на элементарное звено)  $E_{dw}$  пропорциональна константе связи следующих за ближайшими соседями:

$$E_{dw} \approx 3|J_2| = 3J_2$$

(рис. 15а). Однако сравнение рис. 15а с рис. 15б показывает, что в данном случае состояние по другую сторону от доменной стенки однозначно определяется ее ориентацией и различно для различных ориентаций. Возникающее при этом рассогласование значений  $\varphi_j$  должно быть скомпенсировано присутствием дробных вихрей на всех углах доменных стенок, совершенно аналогично тому, как это имеет место в случае максимально фрустрированной XY модели на квадратной решетке (см. раздел 4.2).

Возникающие в результате тепловых флуктуаций дефекты основного состояния, связанные с изменением знака киральностей, при  $J_2 \ll J_1$  будут иметь вид узких полосок, ограниченных двумя доменными стенками с малой энергией (рис. 15в). Так же как и на рис. 14, символом X обозначены узлы, на которых

$$\varphi_j \approx \frac{\varphi_A + \varphi_B}{2}.$$

Аналогичную форму имеют дефекты структуры, возникающие при повышении температуры в однородно фрустрированной XY модели с  $f = 1/4$  или  $f = 1/3$  и треугольной решеткой [230].

Энергия такого дефекта близка к  $2E_0 + 2E_{dw}L$ , где  $E_0 = c_0J_1$  ( $c_0 \approx 0,55$ ) — энергия каждого из его концов, а  $L$  — его длина. Это позволяет оценить долю площади системы  $\rho$ , занятую подобными дефектами. При выпол-

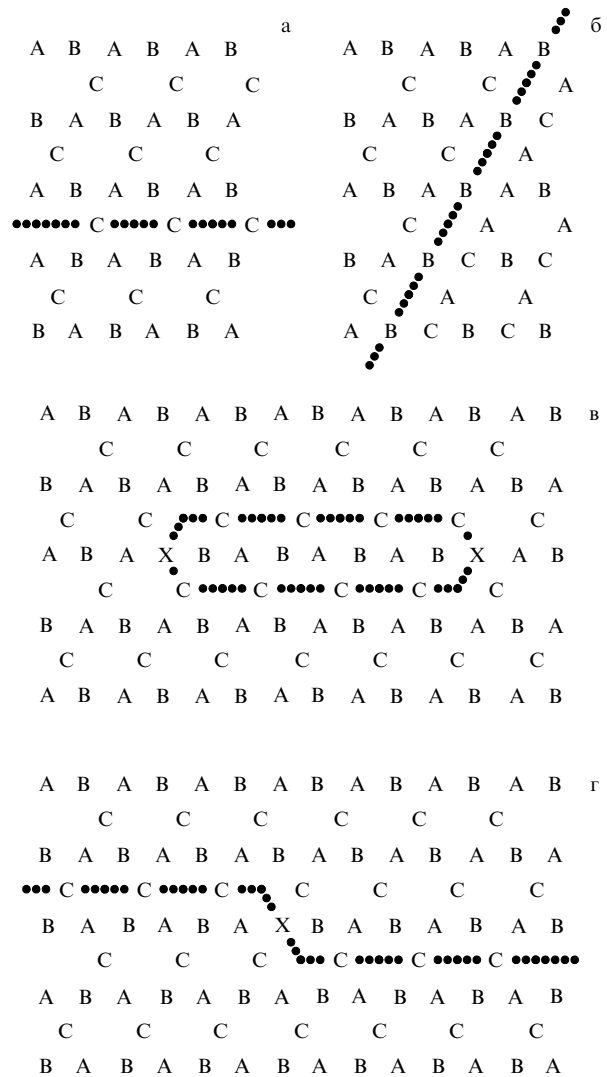


Рис. 15. Примеры топологических дефектов на фоне  $\mathbf{q} = 0$  состояния: (а, б) прямые доменные стенки с различной ориентацией, (в) типичный дефект конечного размера, (г) перегиб на стенке.

нении условия  $E_{dw} \ll T \ll J_1$  имеем

$$\rho \sim \left( \frac{T}{2E_{dw}} \right)^2 \exp \left( - \frac{2E_0}{T} \right).$$

Предположение, что фазовый переход происходит тогда, когда  $\rho$  становится порядка единицы [113], дает для температуры перехода  $T_{dw}$  уравнение

$$T_{dw} \approx \frac{E_0}{\ln(T_{dw}/E_{dw})},$$

откуда [34]

$$T_{dw} \sim \frac{J_1}{\ln(J_1/J_2)}.$$

Такая же оценка следует из сравнения энергии доменной стенки  $E_{dw}$  с ее энтропией  $S_{dw} \approx 2 \exp(-E_k/T)$ , связанной с возможностью образования на ней перегибов. Пример такого перегиба показан на рис. 15г. Его структура весьма похожа на структуру точки окончания линейного

дефекта, изображенного на рис. 15в, в соответствии с чем  $E_k \approx E_0$ .

На самом же деле при  $J_2 \ll J_1$  фазовый переход обусловлен энтропией образования *сетки* из доменных стенок, аналогично тому как это происходит в модели Изинга на треугольной решетке с антиферромагнитным взаимодействием ближайших и более далеких соседей [231]. При этом температура перехода оказывается конечной даже при  $J_1 = \infty$ , когда флуктуации конечного размера на фоне  $\mathbf{q} = 0$  состояния просто невозможны. В этом пределе при низких температурах упорядоченная фаза является полностью замороженной, а ее свободная энергия (на узел) совпадает с энергией  $\mathbf{q} = 0$  состояния

$$E_{\mathbf{q}=0} = -J_1 - J_2.$$

С другой стороны, поскольку при  $J_2 > 0$  энергия  $\sqrt{3} \times \sqrt{3}$  состояния

$$E_{\sqrt{3} \times \sqrt{3}} = -J_1 + 2J_2$$

является наибольшей среди всех состояний, разрешенных при  $J_1 = \infty$ , свободная энергия неупорядоченной фазы  $F_d$  должна удовлетворять неравенству

$$F_d < F_d^+ = E_{\sqrt{3} \times \sqrt{3}} - TS_0,$$

где  $S_0 \approx 0,1264$  [215] — остаточная энтропия (при  $J_2 = 0$ ,  $T = 0$ ) в пересчете на узел.

Сравнение  $E_{\mathbf{q}=0}$  с  $F_d^+$  позволяет заключить, что при  $J_1 = \infty$  температура фазового перехода в неупорядоченную фазу  $T_{dw}$  не должна превышать

$$T_{dw}^+ = \frac{E_{\sqrt{3} \times \sqrt{3}} - E_{\mathbf{q}=0}}{S_0} \approx 23,7 J_2. \quad (58)$$

Аналогичная оценка была предложена в [37] исходя из общих соображений, однако на самом деле неравенство  $T_{dw} < T_{dw}^+$  является строгим. Понятно, что эта же оценка будет работать и при достаточно больших конечных значениях  $J_1$ .

Так же как и в случае антиферромагнитного упорядочения киральностей, появление бесконечных доменных стенок может происходить как отдельный фазовый переход (не вызывающий диссоциацию пар дробных вихрей) только при  $T < T_{fv}$ . Сравнение (56) и (58) показывает, что выполнение неравенства  $T_{dw}^+ < T_{fv}$  требует  $J_2 < J_{\max}^+$ , где  $J_{\max}^+$  порядка  $3 \times 10^{-3} J_1$ . Поскольку появление доменных стенок и в этом случае связано с перемешиванием шести различных состояний (а не двух), фазовый переход при  $T = T_{dw}$  не должен иметь изинговскую природу. Фазовый переход при  $T = T_{dw}^+ < T_{fv}$  переводит систему в ту же самую фазу со степенным спаданием корреляционной функции  $\langle \exp [3i(\varphi_{i+r} - \varphi_j)] \rangle$ , что и фазовый переход при  $T = T_{dw} < T_{fv}$  в случае противоположного знака  $J_2$ .

**При взаимодействии только соседних спинов** случайное вырождение снимается лишь при конечной температуре за счет разницы в свободных энергиях малых флуктуаций (спиновых волн). Аналогичный механизм снятия случайного вырождения был рассмотрен в разделах 4.5 и 5.2. Однако в отличие от этих двух примеров в случае планарного антиферромагнетика с

решеткой кагоме гамильтониан, описывающий гармонические флуктуации, оказывается одним и тем же для всех основных состояний. По этой причине разница между свободными энергиями флуктуаций в окрестности различных основных состояний возникает лишь при учете ангармонизмов и должна являться величиной по меньшей мере второго порядка малости по температуре [35].

Проведенный в [34] расчет показывает, что достаточно ограничиться ангармоническими поправками наинизшего порядка. Свободная энергия ангармонических флуктуаций оказывается минимальной, если киральности соседних треугольных ячеек имеют противоположные знаки (т.е. в  $\sqrt{3} \times \sqrt{3}$  состоянии), а ее величина соответствует

$$E_{dw}^{\text{eff}} = \gamma \frac{T^2}{J_1}, \quad (59)$$

где  $\gamma \approx 2 \times 10^{-3} > 0$ . Тенденция к упорядочению в  $\sqrt{3} \times \sqrt{3}$  состояние проявляет себя и при построении высокотемпературного разложения [216], которое, однако, не позволяет сделать каких-либо выводов о поведении системы в пределе низких температур.

Известно, что как термодинамические [232, 233], так и квантовые [234–236] ангармонические флуктуации в *гейзенберговском* антиферромагнетике с решеткой кагоме также приводят к стабилизации (по крайней мере локальной) планарного состояния с  $\sqrt{3} \times \sqrt{3}$  структурой. К таким же последствиям приводят *гармонические* флуктуации модуля параметра порядка в имеющей геометрию решетки кагоме сетке из сверхпроводящих проволок, помещенной во внешнее магнитное поле, величина которого соответствует полуцелому числу квантов потока на каждую треугольную ячейку [37].

Следует отметить, что эффективная энергия доменной стенки, задаваемая уравнением (59), всегда мала по сравнению с температурой, что, например, в случае модели Изинга привело бы к ее недостаточности для стабилизации упорядочения по киральностям. Однако в рассматриваемой нами системе ситуация является качественно иной.

Подстановка (59) в (57) показывает, что при  $J_2 = 0$  температура фазового перехода, связанного с антиферромагнитным упорядочением киральностей при  $J_2 = 0$ , может быть оценена как

$$T_{dw}(J_2 = 0) \sim \gamma^{3/2} J_1. \quad (60)$$

Подстановка в (60) найденного из численного вычисления значения  $\gamma$ , упоминавшегося выше, дает тогда

$$T_{dw}(J_2 = 0) \sim 10^{-4} J_1.$$

Следует подчеркнуть, что в системе конечного размера упорядочение по киральностям выживает, лишь если свободная энергия доменной стенки, пересекающей всю систему, велика по сравнению с температурой. Это накладывает на размер образца  $L$  условие  $L \gg L_c$ , где  $L_c$  больше или порядка  $L_c^{\text{min}} = T/E_{dw}^{\text{eff}} = J_1/(\gamma T)$ . Из (59) и (60) следует, что в низкотемпературной фазе с дальним порядком по киральностям  $L_c^{\text{min}}$  оказывается больше или порядка  $10^7$  [36], что делает наблюдение упорядочения киральностей, вызванного ангармоническими флуктуа-

циями, весьма и весьма проблематичным. Это согласуется с результатами численного моделирования [220], которые продемонстрировали отсутствие упорядочения по киральностям при  $T \geq 10^{-3}J_1$  и  $L \leq 300$ . Из приведенных выше оценок понятно, что наблюдение такого упорядочения требует не только существенно более низких температур, но и гораздо больших размеров системы.

Интересно, что необходимость учета ангармонических флуктуаций возникает также и при анализе максимально фрустрированных XY моделей на сотовой [36] и гексагональной ромбической [113] решетках. Хотя в обеих этих моделях (в отличие от антиферромагнитной модели на решетке кагоме) гамильтониан, описывающий гармонические флуктуации, в различных основных состояниях имеет различный вид, свободная энергия таких флуктуаций (равно как и энергия их нулевых колебаний) оказывается одинаковой для всех основных состояний из-за наличия у этих гамильтонианов скрытой калибровочной инвариантности [36, 113].

При этом в обоих случаях эффективная энергия доменной стенки, связанная с ангармоническими флуктуациями, также описывается уравнением (59) и является крайне малой в силу численной малости коэффициента  $\gamma$  ( $\gamma \sim 10^{-3} - 10^{-4}$ ). В результате оказывается, что в обеих системах упорядочение по киральностям даже при оптимальной температуре характеризуется настолько большим корреляционным радиусом, что его наблюдение при численном моделировании становится невозможным [36, 113].

### 6.5. Структура фазовой диаграммы

Структура фазовой диаграммы планарного антиферромагнетика с решеткой кагоме [34] схематически (не в масштабе) показана на рис. 16. Фазы с ферромагнитным и антиферромагнитным упорядочением киральностей обозначены соответственно F и AF. Фаза, в которой разрушено упорядочение по киральностям, но корреляционная функция  $\langle \exp [3i(\varphi_{j+r} - \varphi_j)] \rangle$  характеризуется степенным спаданием (и, соответственно, имеется конечная эффективная жесткость), обозначена S, а полностью разупорядоченная фаза — D.

Фазовый переход из S в D связан с диссоциацией пар дробных вихрей с топологическим зарядом  $\pm 1/3$  [35, 218, 219]. В разделе 6.3 показано, что дополнительное взаимодействие дробных вихрей, обусловленное флуктуациями связывающих их доменных стенок, является короткодействующим и, следовательно, несущественным. Соответствующий фазовый переход должен относиться к классу универсальности БКТ, а значение модуля жесткости в точке перехода должно удовлетворять соотношению (55).

Однако область параметров, в которой реализуется сценарий с  $T_{dw} < T_{fv}$  и диссоциация пар дробных вихрей происходит как независимый фазовый переход, оказывается чрезвычайно узкой:  $-J_{max} < J_2 < J_{max}^+$ , где  $J_{max}, J_{max}^+ \sim (10^{-2} - 10^{-3})J_1$ . Для больших значений  $|J_2|$  два фазовых перехода должны слиться в один. Это подтверждается результатами численного моделирования Гехта и Бондаренко [33], которые показали, что при  $|J_2| \geq 0,1J_1$  разупорядочение по непрерывным и дискретным степеням свободы происходит при одной и той же температуре, а термодинамическая сингулярность близка к изинговской.

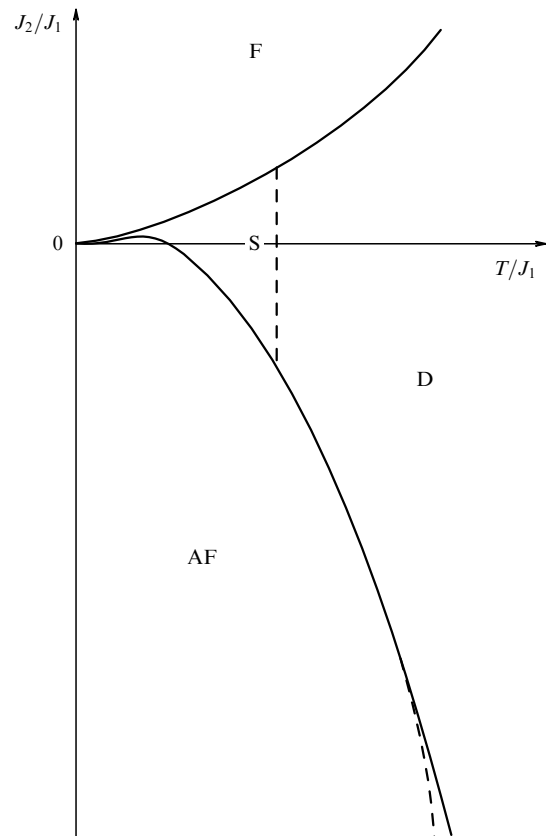


Рис. 16. Схематическое изображение структуры фазовой диаграммы антиферромагнитной XY модели на решетке кагоме.

При  $J_2 < 0$  и  $|J_2| \sim J_1$  должно произойти новое расщепление фазового перехода на два, соответствующее реализации сценария с  $T_v < T_{dw}$  и связанное с механизмом, рассмотренным в разделе 5. Это расщепление показано в нижней части рис. 16.

Учет ангармонических флуктуаций приводит к небольшому увеличению эффективной величины константы связи  $J_2$ , что вызывает некоторый загиб вверх области существования фазы S, имеющей форму клювика. Вследствие этого при очень малых, но положительных  $J_2$  в системе при повышении температуры должно происходить четыре фазовых перехода в последовательности  $F \rightarrow S \rightarrow AF \rightarrow S \rightarrow D$ .

Так же как в случае треугольной решетки, полученные результаты применимы для описания не только планарных антиферромагнетиков, но и решеток джозефсоновских контактов и сеток из сверхпроводящих проволок с полувещным числом квантов потока на каждую треугольную ячейку, а также решеток  $\pi$ -контактов в отсутствие магнитного поля. В таких системах взаимодействием, приводящим к снятию случайного вырождения, является магнитное взаимодействие токов [37].

В [37] было показано, что магнитная энергия токов минимальна в  $\mathbf{q} = 0$  состоянии. Отсюда следует, что ее учет в рамках представленного в этом разделе анализа должен был бы соответствовать  $J_2 > 0$ . Однако более систематический подход [112, 113], учитывающий не только собственную энергию магнитных полей, создаваемых токами, но и влияние этих полей на изменение свободной энергии джозефсоновских контактов (или сверхпроводящих проволок), показывает, что суммар-

ное изменение свободной энергии имеет противоположный знак. Вследствие этого во фрустрированных сверхпроводящих системах с геометрией решетки кагоме учет магнитных эффектов соответствует  $J_2 < 0$ .

## 7. Солитоны и расщепление фазового перехода

**7.1. XY модель с модифицированным взаимодействием**  
Рассмотрим теперь модификацию XY модели, описываемую гамильтонианом

$$H = \sum_{\langle ij \rangle} V(\varphi_i - \varphi_j), \quad (61)$$

где в отличие от стандартной XY модели с  $V(\theta) = -J \cos \theta$ , применимой для описания планарных ферромагнетиков и решеток обычных джозефсоновских контактов, будем полагать, что четная периодическая функция  $V(\theta)$ , наряду с основным минимумом, расположенным при  $\theta = 0$ , имеет почти столь же глубокий дополнительный минимум при  $\theta = \pi$  (рис. 17а). Определенные с точностью до сдвига на  $2\pi$  фазовые переменные  $\varphi_i$  будут предполагаться заданными в узлах квадратной решетки.

Как показано в [38–40], такая зависимость джозефсоновской энергии от разности фаз характерна для SFS (сверхпроводник–ферромагнетик–сверхпроводник) контактов, параметры которых близки к точке перехода контакта в так называемое  $\pi$ -состояние [41–43], так что рассматриваемая модель применима для описания регулярной решетки, изготовленной из подобных контактов. Экспериментально переход SFS контакта в  $\pi$ -состояние при изменении температуры был продемонстрирован в [237–239], а при изменении параметров контакта — в [240]. Первый эксперимент на решетке SFS контактов (состоящей, правда, всего из двух ячеек) был осуществлен в [241].

### 7.2. Классификация дефектов и возможные фазовые переходы

Введем обозначения:  $V_1 \equiv V(\pi) - V(0)$  для разницы в энергиях между неэквивалентными минимумами функции  $V(\theta)$  и  $V_2$  для ее кривизны вблизи минимумов, которую будем полагать удовлетворяющей условию  $V_2 \gg V_1$  и одинаковой для обоих минимумов. При низких температурах основной вклад в статсумму системы с непрерывным вырождением вносят как ее основные состояния (соответствующие абсолютному минимуму гамильтониана), так и низколежащие локальные минимумы гамильтониана, а также малые флуктуации в окрестностях этих минимумов (спиновые волны). Последние ответственны за степенное спадание корреляционной функции  $\langle \exp [i(\varphi_{i+r} - \varphi_i)] \rangle$  с ростом  $|r|$  [1, 66].

В XY модели с введенным выше модифицированным взаимодействием можно выделить два базовых типа локальных минимумов гамильтониана: вихри и солитоны. Вихри — это точечные топологические возмущения, имеющие ту же структуру, что и в стандартной XY модели (см. рис. 1). Поскольку в рассматриваемой системе затравочное значение модуля жесткости равно  $V_2$ , можно ожидать, что диссоциация вихревых пар будет происходить при  $T = T_v \sim V_2$ . Второй же вид локальных

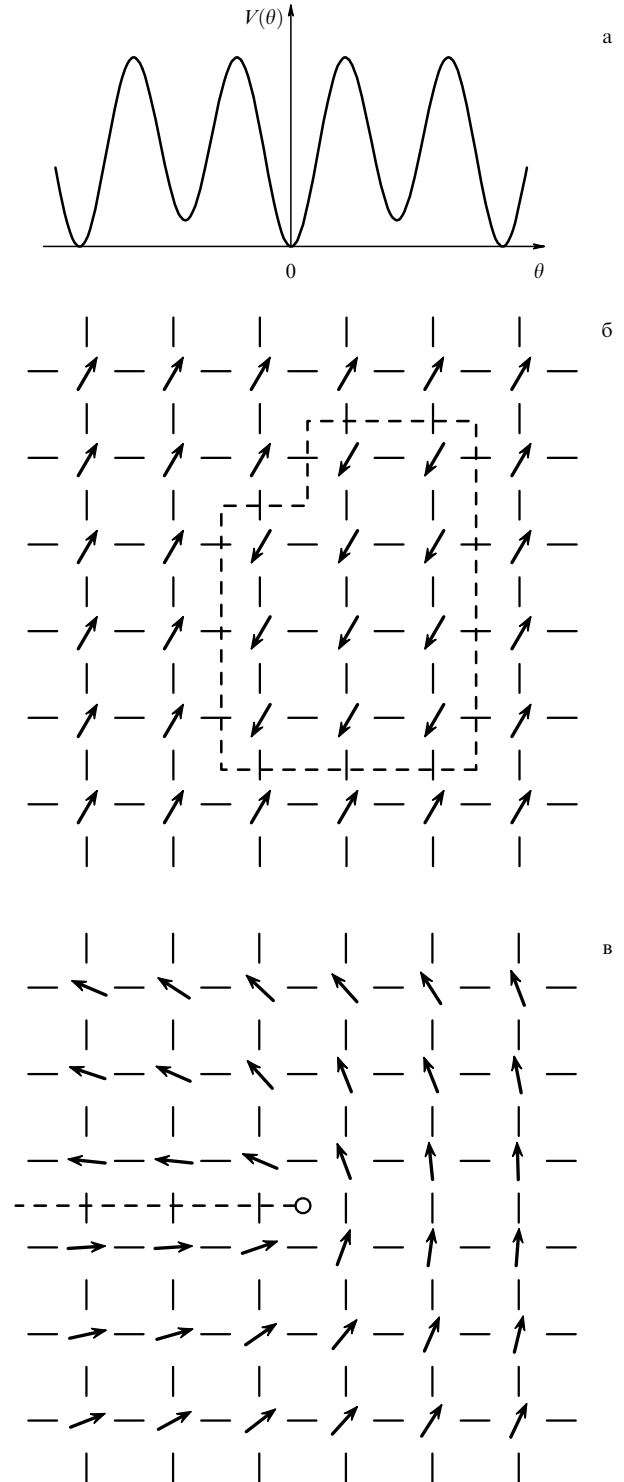


Рис. 17. (а) Взаимодействие  $V(\theta)$ , приводящее к возможности образования солитонов; (б) замкнутый солитон; (в) солитон, оканчивающийся на полувихре с  $m = +1/2$ .

минимумов гамильтониана это солитоны — линии на дуальной решетке, при пересечении которых фаза меняется на  $\pi$  [44–46] (рис. 17б). Энергия солитона на единицу длины равна  $V_1$ , поэтому при  $T \ll V_1$  все солитоны, возникающие как тепловые флуктуации, должны быть замкнуты и иметь небольшую длину.

Следует подчеркнуть, что солитон не является неустранимым топологическим возмущением, поскольку

состояния по обе стороны от него можно перевести друг в друга непрерывным образом, не выходя из пространства вырождения. Это означает, что в отличие от доменных стенок в модели Изинга солитоны могут иметь точки окончания. Чтобы скомпенсировать скачок фазы на солитоне, при обходе вокруг точки окончания солитона фаза должна постепенно меняться на  $\pm\pi$ . Это означает, что точки окончания солитонов представляют собой вихри с полувещным топологическим зарядом [44–46]. Естественно, минимальная энергия соответствует  $m = \pm 1/2$ . Для краткости мы будем называть такие объекты (рис. 17в) полувихрями.

Как и в случае целочисленных вихрей с  $m = \pm 1$ , взаимодействие полувихрей с  $m = \pm 1/2$  является логарифмическим, при этом константа взаимодействия (стоящая перед логарифмом) оказывается в четыре раза меньше. Если бы полувихри существовали независимо от солитонов, диссоциация образованных ими нейтральных пар происходила бы при температуре  $T = T_{hv}$ , где  $T_{hv} \ll T_v$  — решение уравнения

$$T_{hv} = \frac{\pi}{8} \Gamma(T_{hv}), \quad (62)$$

аналогичного уравнению (18). Однако, поскольку каждый полувихрь является к тому же и точкой окончания солитона, попытка развести два полувихря на произвольное расстояние выявляет наличие также и линейного по расстоянию вклада в их взаимодействие, связанного с энергией соединяющего их солитона. При  $V_1$  одного порядка с  $V_2$  наличие такого взаимодействия служит препятствием к диссоциации пар полувихрей при  $T = T_{hv}$ .

Если  $T \ll V_2/4$ , а соотношение между  $T$  и  $V_1$  произвольно, логарифмическое взаимодействие точек окончания солитонов приводит к тому, что все они связаны в нейтральные (по топологическому заряду) пары малого размера. Поэтому рядом с любой точкой окончания солитона всегда должна находиться другая точка окончания, выходящий из которой солитон можно считать продолжением первого. Благодаря этому при  $T \ll V_2/4$  солитоны ведут себя как топологические возбуждения в модели Изинга (доменные стенки), даже не будучи таковыми по своей сути [44, 45].

Это означает, что при  $T = T_S \sim V_1$  в системе должен происходить фазовый переход из низкотемпературной фазы, в которой все солитоны образуют замкнутые петли (пусть и содержащие маленькие разрывы), в фазу, в которой присутствуют солитоны бесконечной длины. Поскольку в этой фазе с увеличением расстояния между двумя точками число некоррелированных солитонов, их разделяющих, неограниченно растет, а на каждом из них скачком меняется на  $\pi$ , поведение системы при  $T > T_S$  будет характеризоваться экспоненциальным спадением корреляционной функции  $\langle \exp [i(\varphi_{j+r} - \varphi_j)] \rangle$ .

В то же время присутствие солитонов не оказывает существенного влияния на поведение корреляционной функции  $\langle \exp [2i(\varphi_{j+r} - \varphi_j)] \rangle$ , которая при  $T > T_S$ , так же как и при  $T < T_S$ , будет вести себя степенным образом, поскольку фазовый переход, происходящий при  $T = T_S$ , не приводит к занулению модуля жесткости. Таким образом, фазовый переход при  $T = T_S$  можно трактовать как переход в нематическую фазу, в которой симметрия по отношению к повороту на угол  $\pi$  не является нарушенной. Интересно, что хотя фазовый

переход связан с группой симметрии  $Z_2$ , из-за отсутствия дальнего порядка по  $\exp(i\varphi_j)$  не удастся ввести явное выражение (в терминах  $\varphi_j$ ) для параметра порядка, связанного с этим переходом.

Обращение в нуль при  $T > T_S$  свободной энергии на единицу длины солитона означает, что линейный вклад во взаимодействие полувихрей экранируется и возникает реальная возможность диссоциации пар полувихрей. Если считать, что наличие солитонов не приводит к какой-либо перенормировке затравочного логарифмического взаимодействия полувихрей, то их распаривание и фазовый переход в неупорядоченную фазу, в которой не только корреляционная функция  $\langle \exp [i(\varphi_{j+r} - \varphi_j)] \rangle$ , но и корреляционная функция  $\langle \exp [2i(\varphi_{j+r} - \varphi_j)] \rangle$  спадает экспоненциально, должны происходить при  $T = T_{hv} \sim V_2/4$ . Сравнение с оценкой  $T_S \sim V_1$  показывает, что при уменьшении отношения  $V_1/V_2$  в системе с неизбежностью должно происходить расщепление фазового перехода на два [44–46].

### 7.3. Дуальное и кулоновское представления

Для более строгого доказательства возможности существования промежуточной фазы нематической природы, отделенной от высокотемпературной неупорядоченной фазы фазовым переходом, относящимся к классу универсальности БКТ, рассмотрим взаимодействие  $V(\theta)$ , для которого весовой фактор

$$w(\theta) = \exp \left[ -\frac{V(\theta)}{T} \right]$$

имеет вид [45, 46]

$$w(\theta) = w_{BV}(\theta) + \exp \left( -\frac{K}{T} \right) w_{BV}(\theta - \pi), \quad (63)$$

где  $w_{BV}(\theta)$  — весовой фактор (4), соответствующий взаимодействию Березинского – Виллэна. При  $K \ll T \ll J$  определенные выше параметры  $V_1$  и  $V_2$  близки к  $K$  и  $J$  ( $V_1 \approx K$ ,  $V_2 \approx J$ ).

Применение дуального преобразования (см. раздел 2.6) позволяет трансформировать статсумму XY модели, определенной таким образом, в статсумму SOS модели, определенной гамильтонианом [44]

$$H_{SOS} = \sum_{(\mathbf{R}\mathbf{R}')} \left[ \frac{J_*}{2} (n_{\mathbf{R}} - n_{\mathbf{R}'})^2 - \frac{K_*}{2} s_{\mathbf{R}} s_{\mathbf{R}'} \right], \quad (64)$$

где  $J_* = T^2/J$ , целочисленные переменные  $n_{\mathbf{R}}$  определены в узлах  $\mathbf{R}$  дуальной решетки:

$$s_{\mathbf{R}} \equiv \exp(i\pi n_{\mathbf{R}}) = \pm 1,$$

а  $K$  и  $K_*$  связаны соотношением дуальности Крамерса – Ванье [120]:

$$\sinh \frac{K}{T} \sinh \frac{K_*}{T} = 1,$$

так что условию  $K \ll T \ll J$  соответствует  $K_* \gg T \gg J_*$ .

Из вида гамильтониана (64) легко понять, что энергия ступеней единичной высоты  $E_{\text{step}}^{(1)}$  равна  $K_* + J_*/2$ , тогда как энергия ступеней двойной высоты  $E_{\text{step}}^{(2)} = 2J_*$  может быть и меньше, чем  $E_{\text{step}}^{(1)}$ . При  $K_* \rightarrow \infty$  величина  $E_{\text{step}}^{(1)}$  стремится к бесконечности, так что все переменные  $n_{\mathbf{R}}$

должны быть либо четными, либо нечетными. Если при этом  $J_* \ll T$ , то система, тем не менее, будет находиться в шероховатом состоянии, в котором квадрат ширины поверхности расходится, а свободная энергия двойной ступени (на единицу длины) равна нулю.

При  $K_* < \infty$  становится возможным образование доменных стенок, разделяющих два шероховатых "вакуума". Такие доменные стенки (они же ступени единичной высоты) обладают большой энергией на единицу длины, и, следовательно, при  $K_* \ll T$  их свободная энергия должна быть конечна (энтропия может быть оценена сверху величиной порядка единицы). Это означает, что существуют лишь небольшие вкрапления одного из двух вакуумов в другом, и сохраняется асимметрия между четными и нечетными значениями  $n$ , т.е. дальний порядок по переменной  $s$  [44].

Из результатов [90, 91] следует, что конечность свободной энергии простой ступени на языке исходной XY модели означает экспоненциальное спадание коррелятора  $\langle \exp [i(\varphi_{j+r} - \varphi_j)] \rangle$ , а зануление свободной энергии двойной ступени — степенное спадание коррелятора  $\langle \exp [2i(\varphi_{j+r} - \varphi_j)] \rangle$ . Таким образом, мы получили еще одно подтверждение того, что XY модель со взаимодействием (63) при  $K \ll T \ll J$  находится в нематической фазе, описанной выше.

Однако как в исходном представлении в терминах  $\varphi_j$ , так и в дуальном представлении нематическая фаза представляет собой фазу, в которой флуктуации являются слабыми лишь для одного из двух возможных типов флуктуаций, тогда как наиболее убедительным доказательством ее существования стало бы построение представления, в котором при выполнении условия  $K \ll T \ll J$  все флуктуации были бы слабыми.

Для достижения этой цели удобно перейти в статсумме SOS модели от суммирования по переменным  $n_{\mathbf{R}}$  к интегрированию, сохраняя при этом  $s_{\mathbf{R}}$  в качестве независимых переменных. Для этого следует представить  $n_{\mathbf{R}}$  в виде

$$n_{\mathbf{R}} = 2\tilde{n}_{\mathbf{R}} + \frac{1 - s_{\mathbf{R}}}{2},$$

где  $\tilde{n}_{\mathbf{R}}$  — также целое, и перейти от суммирования по  $\tilde{n}_{\mathbf{R}}$  к интегрированию при помощи формулы суммирования Пуассона (22). Это приводит к статсумме [44]

$$Z_{\text{CG}} = \prod_{\mathbf{R}} \left( \sum_{m_{\mathbf{R}}=-\infty}^{\infty} \sum_{s_{\mathbf{R}}=\pm 1} \right) \times \exp \left[ -\frac{1}{2T} \sum_{\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2} \frac{m_{\mathbf{R}_1}}{2} G_0(\mathbf{R}_1 - \mathbf{R}_2) \frac{m_{\mathbf{R}_2}}{2} + i\pi \sum_{\mathbf{R}} \frac{m_{\mathbf{R}}}{2} s_{\mathbf{R}} - \frac{K_*}{2T} \sum_{(\mathbf{R}\mathbf{R}')} s_{\mathbf{R}} s_{\mathbf{R}'} \right], \quad (65)$$

которая наряду с суммированием по  $s_{\mathbf{R}} = \pm 1$  включает в себя и суммирование по целочисленным переменным  $m_{\mathbf{R}}$ , также определенным в узлах дуальной решетки, причем  $G_0(\mathbf{R})$  имеет стандартный вид (8). Статсумма (65) может интерпретироваться как статсумма кулоновского газа, состоящего из целых и полужелых зарядов  $m_{\mathbf{R}}/2$ , взаимодействующих с моделью Изинга. Понятно, что при  $T \ll J, K_*$  все эти заряды связаны в пары, а изинговские переменные  $s_{\mathbf{R}}$  упорядочены. Рассмотрим теперь, к каким последствиям приводит взаимодействие  $m$  и  $s$ .

При  $J \rightarrow \infty$  статсумма (65) переходит в статсумму двумерной модели Изинга, точное решение которой было впервые найдено Онсагером [118]. Фазовый переход в этой модели происходит при

$$T = T_c = \frac{K_*}{\ln(1 + \sqrt{2})},$$

что может быть показано из соображений дуальности [120].

При  $J \gg T$  в (65) можно провести суммирование по  $m_{\mathbf{R}}$ , считая, что все заряды связаны в нейтральные пары, находящиеся далеко друг от друга, причем взаимное влияние пар проявляется только в перенормировке  $J$ . Результатом суммирования становится появление дополнительного ферромагнитного взаимодействия переменных  $s_{\mathbf{R}}$ , спадающего на больших расстояниях как  $R^{-\pi J/2T}$ . Если полувихри связаны в пары, то  $\pi J/2T \geq 4$  и согласно [241] это дополнительное взаимодействие не может привести к изменению характера изинговского перехода.

При  $K_* \rightarrow \infty$  статсумма (65) переходит в статсумму кулоновского газа, образованного зарядами  $m_{\mathbf{R}}/2$ , фазовый переход в котором связан с диссоциацией нейтральных пар зарядов минимальной величины  $m_{\mathbf{R}}/2 = \pm 1/2$ , т.е. полувихрей. При  $K_* < \infty$  учет флуктуаций  $s$  приводит к тому, что к затравочному взаимодействию полувихрей добавляется слагаемое  $-T \ln \langle s_{\mathbf{R}} s_{\mathbf{R}'} \rangle$ . При больших  $K_*$ , когда  $\langle s_{\mathbf{R}} \rangle \neq 0$ , это приводит лишь к уменьшению химической активности полувихрей, а поправка к их взаимодействию спадает экспоненциально. При меньших  $K_*$ , когда  $\langle s_{\mathbf{R}} \rangle$  зануляется, возникает взаимодействие, пропорциональное расстоянию между полувихрями, т.е. свободная энергия солитона (на единицу длины) становится конечной.

#### 7.4. Структура фазовой диаграммы

Следующая из результатов этого раздела фазовая диаграмма XY модели с модифицированным взаимодействием [44–46] схематически изображена на рис. 18 в переменных  $T/J$  и  $K/T$ . Через D обозначена неупорядоченная фаза, через S — низкотемпературная (сверхпроводящая) фаза и через I — промежуточная "нематическая" фаза, в которой сверхтекучая плотность также является конечной. Согласно [47, 48] в терминах сверх-

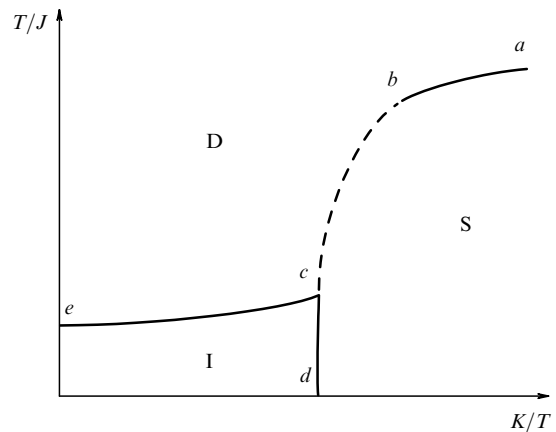


Рис. 18. Фазовая диаграмма XY модели с модифицированным взаимодействием, приводящим к возможности появления солитонов.

проводящей решетки в этой фазе когерентным является движение не куперовских пар (поскольку парный коррелятор параметра порядка спадает экспоненциальным образом), а пар куперовских пар.

На линии  $ab$  происходит диссоциация пар обычных вихрей, на линии  $ce$  — диссоциация пар полувихрей (оба перехода относятся к классу универсальности БКТ), а на линии  $bd$  — фазовый переход, связанный с солитонами. На участке  $cd$  это должен быть переход изинговского типа, а на участке  $bc$  при обращении в нуль свободной энергии солитона логарифмическое взаимодействие полувихрей оказывается недостаточно сильным для того, чтобы они были связаны в пары. Поэтому переход в этом случае должен происходить непосредственно в неупорядоченную фазу, однако иным, чем на линии  $ab$ , образом.

Можно ожидать, что это будет происходить при помощи перехода первого рода. Из результатов численного моделирования известно, что различные модификации взаимодействия в ХУ модели, ведущие к увеличению химической активности вихрей [243–246] (т.е. уменьшению энергии кора), или же непосредственное увеличение плотности двумерного кулоновского газа [247] приводят к превращению перехода БКТ в переход первого рода. К этому же выводу приводят попытки самосогласованного обобщения ренормгруппового подхода на область больших химических активностей [248–251].

В рассматриваемой здесь модели уменьшение  $K$  приводит к возможности расщепления кора на два полувихря, связанных солитоном, который в свою очередь может флуктуировать. Понятно, что это приводит к уменьшению эффективной свободной энергии кора и, соответственно, способствует изменению рода перехода на первый. Исходя из (18) и (62), можно ожидать, что на участке  $bc$  значение модуля жесткости  $\Gamma$  в низкотемпературной фазе будет плавно меняться от  $(2/\pi)T$  в точке  $b$  до  $(8/\pi)T$  в точке  $c$ .

Фазовая диаграмма с аналогичной топологией возникает также при использовании обобщения рекурсивной процедуры Мигдала–Каданова [252, 253], основанного на ограничении числа параметров, описывающих взаимодействие [45]. Такая модификация этого метода (стандартная версия которого не замечает БКТ переход [76]) применима и для описания систем с  $U(1)$  вырождением. Предложенная структура фазовой диаграммы также нашла свое подтверждение при численном моделировании [254].

Линия  $K = 0$  соответствует переходу контактов в  $\pi$ -состояние. При пересечении этой линии происходит перестройка основных состояний. В случае квадратной решетки она состоит в относительном развороте переменных  $\varphi_j$ , относящихся к двум различным  $\sqrt{2} \times \sqrt{2}$  подрешеткам, на  $\pi$ . Соответствующая такому развороту замена переменных позволяет убедиться, что вид статсуммы не зависит от знака  $K$ , поэтому полная фазовая диаграмма ХУ модели с модифицированным взаимодействием и квадратной решеткой будет зеркально симметрична относительно линии  $K = 0$ .

## 8. Двумерная сверхтекучая ферми-жидкость с $p$ -спариванием

В приближении Бардина–Купера–Шриффера (БКШ) минимум свободной энергии двумерной сверхтекучей

ферми-жидкости с  $p$ -спариванием достигается сразу в двух различных фазах — аксиальной и планарной [50–52]. Выбор между ними определяется конкретными особенностями взаимодействия, которые проявляют себя в диаграммах следующего порядка малости по  $T_c/\varepsilon_F$  [49]. Экспериментальное исследование сверхтекучести и фазовых переходов в пленках  $^3\text{He}$ , толщина которых сравнима с длиной когерентности, осуществлялось в [255–260], а переход в сверхтекучее состояние субатомной пленки  $^3\text{He}$  на поверхности тонкой пленки  $^4\text{He}$  был зарегистрирован в [261].

### 8.1. Аксиальная фаза

В аксиальной фазе параметр порядка имеет вид

$$A_{zk} = \Delta d_x (w_k^{(1)} + i w_k^{(2)}),$$

где  $\Delta$  — действительное число,  $d_x$  — единичный вектор в спиновом (трехмерном) пространстве, а  $w_k^{(1)}$  и  $w_k^{(2)}$  — взаимно перпендикулярные единичные векторы в орбитальном (двумерном) пространстве [51]. Положение векторов  $w_k^{(1)}$  и  $w_k^{(2)}$  удобно параметризовать при помощи фазы  $\varphi$ , выразив комбинацию  $w_k^{(1)} + i w_k^{(2)}$  через какие-либо фиксированные орты  $w_k'$  и  $w_k''$  орбитального пространства

$$A_{zk} = \Delta d_x (w_k' + i w_k'') \exp i\varphi, \quad (66)$$

где  $l = \hat{z}[\mathbf{w}^{(1)} \times \mathbf{w}^{(2)}] = \pm 1$  — орбитальное число, а  $\hat{z}$  — нормаль к поверхности. Пространство вырождения параметра порядка (66) представляет собой  $((S^2 \times S^1)/Z_2) \times Z_2$ , где двумерная сфера  $S^2$  есть область изменения  $\mathbf{d}$ , одномерная сфера  $S^1$  — область изменения  $\varphi$ , а факторизация прямого произведения  $S^2 \times S^1$  по группе  $Z_2$  отражает тот факт, что пары переменных  $(\mathbf{d}, \varphi)$  и  $(-\mathbf{d}, \varphi + \pi)$  соответствуют одному и тому же значению  $A_{zk}$ . При учете спин-орбитального (дипольного) взаимодействия, имеющего вид

$$E_{\text{dip}}^a = -\frac{g_{\text{dip}}^a}{2} (\mathbf{d}\hat{z})^2, \quad (67)$$

это пространство вырождения сужается до  $S^1 \times Z_2$ .

Рассматривая лишь орбитальную часть параметра порядка аксиальной фазы, Стайн и Кросс [262] пришли к выводу о том, что в ней существует два вида топологических возбуждений — вихри, при обходе вокруг которых  $\varphi$  меняется на  $\pm 2\pi$ , и доменные стенки, разделяющие области с  $l = \pm 1$ , в соответствии с чем в системе должны происходить два фазовых перехода, относящиеся к классам универсальности БКТ и Изинга.

Халси [21] показал, что доменная стенка в аксиальной фазе характеризуется возможностью непрерывного распределения завихренности на ней. Иначе говоря, на доменной стенке могут образовываться не связанные в пары дробные вихри с произвольными топологическими зарядами. Из анализа, представленного в разделе 4.3, следует, что это должно привести к потере когерентности между флуктуациями фазы по обе стороны от стенки при сколь угодно низкой температуре. Как уже обсуждалось в разделе 4.4, в такой ситуации фазовый переход, связанный с диссоциацией вихревых пар, должен происходить при заведомо более низкой температуре, чем фазовый переход изинговского типа, связанный с разупорядочением по орбитальному числу  $l$ .



Если принять во внимание возможность изменения и спиновой части параметра порядка (66), то в число текстур, являющихся локальными минимумами энергии, помимо вихрей и доменных стенок, войдут также и солитоны — линейные объекты, внутри которых вектор  $\mathbf{d}$  меняет свое направление (проходя через максимум дипольной энергии), а фаза  $\varphi$  остается постоянной [49]. Солитон разделяет области с противоположно направленными векторами  $\mathbf{d}$ , что эквивалентно отличающимся на  $\pi$  значениям фазы  $\varphi$ . Толщина солитона порядка дипольной длины  $\xi_{\text{dip}} = K_d/g_{\text{dip}}^a$ , а характерная энергия (в пересчете на длину, равную ширине) порядка  $K_d$ , где  $K_d$  — один из коэффициентов в выражении для градиентной энергии

$$E_{\text{grad}}^a = \frac{K_d}{2} (\nabla_k d_x)^2 + \frac{K_\varphi}{2} (\nabla_k \varphi)^2.$$

Следует отметить, что солитоны не являются неустранимыми топологическими особенностями, поскольку они разделяют области значений параметра порядка, переводимых друг в друга непрерывным преобразованием. Поэтому, в отличие от доменных стенок, солитоны могут иметь точки окончания. Так же как в А-фазе трехмерного  $^3\text{He}$  [263] и в модифицированной ХУ модели, рассмотренной в разделе 7, солитон может оканчиваться на вихре с полувещным топологическим зарядом. Согласно результатам, изложенным в разделе 7.2, это делает возможным сценарий, при котором фазовый переход, связанный с диссоциацией вихревых пар, расщепляется на два отдельных перехода, первый из которых (при  $T = T_S \sim K_d$ ) связан с появлением солитонов (ведущих себя при низких температурах как доменные стенки изинговского типа), а второй (при  $T = T_{\text{hv}} \sim K_\varphi/4$ ) — с диссоциацией связанных пар полувихрей.

В приближении БКШ  $K_d = K_\varphi$ , что на первый взгляд не оставляет возможностей для реализации сценария с  $T_S < T_{\text{hv}}$ . Следует, однако, учесть, что флуктуации трехмерного вектора  $\mathbf{d}$  могут привести к существенной перенормировке  $K_d$  [264] при переходе от масштабов порядка длины когерентности  $\xi$  к масштабам порядка  $\xi_{\text{dip}}$ , на которых эта перенормировка заканчивается (мы считаем, что  $\xi_{\text{dip}} \gg \xi$ , как это и имеет место быть в сверхтекучем  $^3\text{He}$ ). В этом случае фазовый переход, связанный с обращением в нуль свободной энергии солитона, должен происходить при  $T_S \sim K_d/\ln(\xi_{\text{dip}}/\xi)$  (ср. с [265]). Именно выполнение условия  $\xi_{\text{dip}} \gg \xi$  позволяет надеяться, что этот фазовый переход произойдет при температуре, достаточно низкой для того, чтобы точки окончания солитонов были связаны (логарифмическим взаимодействием, пропорциональным  $K_\varphi$ ) в пары малого размера [45].

Следует особо подчеркнуть, что эффективная величина спин-орбитального взаимодействия может быть уменьшена при помощи магнитного поля [53]. В двумерной аксиальной фазе, так же как и в ее трехмерном аналоге (т.е. в А-фазе сверхтекучего  $^3\text{He}$ ), зависящая от ориентации параметра порядка часть свободной энергии, связанная с магнитным полем  $\mathbf{H}$ , может быть представлена в виде

$$E_{\text{magn}}^a = \frac{\chi}{2} (\mathbf{dH})^2.$$

Сравнение с (67) показывает что при  $\mathbf{H} \parallel \hat{\mathbf{z}}$  включение магнитного поля эквивалентно замене  $g_{\text{dip}}^a$  на  $g_{\text{dip}}^{\text{eff}} = g_{\text{dip}}^a - \chi H^2$ . При увеличении поля  $g_{\text{dip}}^{\text{eff}}$  уменьшается и при  $H = g_{\text{dip}}^a/\chi$  обращается в нуль. Соответствующим образом растет и обращается в бесконечность  $\xi_{\text{dip}}$ , что дает возможность понизить  $T_S$ , насколько это необходимо.

При  $T > T_S$  система оказывается в фазе, в которой парный коррелятор параметра порядка  $A_{zk}$  спадает экспоненциальным образом, однако сверхтекучая плотность остается конечной (поскольку флуктуации  $\mathbf{d}$  не ведут к перенормировке  $K_\varphi$ ). В частности, это обеспечивает степенное спадание четвертого коррелятора

$$\begin{aligned} & \langle A_{zk}(\mathbf{r}_1) A_{zk'}(\mathbf{r}_1) A_{\beta k}^*(\mathbf{r}_2) A_{\beta k'}^*(\mathbf{r}_2) \rangle \propto \\ & \propto \langle \exp \{ 2i[\varphi(\mathbf{r}_1) - \varphi(\mathbf{r}_2)] \} \rangle. \end{aligned}$$

В отсутствие спин-орбитального взаимодействия такая фаза существует при сколь угодно малых температурах. Из-за флуктуаций спиновой части параметра порядка в ней оказывается восстановленной симметрия по отношению к повороту фазы на  $\pi$ , поэтому дальнейшее разупорядочение будет проходить через диссоциацию пар полувихрей, а не вихрей. Как следствие, отношение сверхтекучей плотности к температуре при фазовом переходе в полностью разупорядоченное состояние будет в четыре раза выше [49]:

$$\frac{\rho_s(T_{\text{hv}})}{T_{\text{hv}}} = \frac{8}{\pi} \left( \frac{2m_3}{\hbar} \right)^2, \quad (68)$$

чем в случае, если бы переход был связан с диссоциацией пар обычных вихрей, как это предполагалось в [262].

Если вспомнить, что при еще более высоких температурах происходит уже упомянутое разупорядочение по  $l$ , то можно заключить, что при наличии слабого спин-орбитального взаимодействия переход из аксиальной фазы в полностью разупорядоченное состояние состоит из трех последовательных фазовых переходов (двух изинговских и перехода БКТ между ними [49]). При выполнении условия приближения слабой связи ( $T_c \ll \varepsilon_F$ ) все эти переходы должны происходить в малой окрестности  $T_c$  (температуры перехода в приближении БКШ), так как лишь при

$$\frac{T_c - T}{T_c} \sim \frac{T_c}{\varepsilon_F}$$

константы в выражении для градиентной энергии становятся порядка  $T$ .

Численное моделирование по методу Монте-Карло решеточной модели аксиальной фазы, не учитывающей дипольного взаимодействия, подтвердило [266], что в ней имеют место два фазовых перехода. При понижении температуры вначале происходит переход изинговского типа, видимый по расходимости теплоемкости, а затем переход БКТ, связанный с появлением квазиупорядочения по  $\exp(2i\varphi)$ .

## 8.2. Планарная фаза

Параметр порядка планарной фазы может быть представлен в виде

$$A_{zk} = \Delta R_{zk'} (\delta_{k'k} - \hat{z}_{k'} \hat{z}_k) \exp(i\varphi), \quad (69)$$

где  $R_{zk}$  — матрица трехмерных вращений. Благодаря наличию проецирующего множителя  $(\delta_{k'k} - \hat{z}_k \hat{z}_k)$  индекс  $k$  пробегает фактически только два значения. Это проецирование приводит к тому, что одно и то же значение  $A_{zk}$  может быть двумя способами представлено в виде (69) с различными матрицами  $R_{zk}$  и фазами  $\varphi$ , отличающимися на  $\pi$ . В соответствии с этим пространство вырождения параметра порядка (69) имеет структуру  $(\text{SO}(3) \times S^1)/Z_2$ , где  $\text{SO}(3)$  есть область изменения  $R_{zk}$ , окружность  $S^1$  — область изменения  $\varphi$ , а факторизация по  $Z_2$  отражает неоднозначность, указанную выше.

Ситуация в планарной фазе совершенно аналогична ситуации в аксиальной фазе, описанной в разделе 8.1 (если отвлечься от наличия в аксиальной фазе дополнительной дискретной степени свободы). Градиентная энергия распадается на слагаемые, связанные с  $R_{zk}$  и  $\varphi$ . В отсутствие спин-орбитального взаимодействия не ренормируется в нуль лишь жесткость, связанная с  $\varphi$  (сверхтекучая плотность). При этом парный коррелятор параметра порядка спадает экспоненциальным образом, однако остается конечной сверхтекучая плотность  $\rho_s$ . При уменьшении  $\rho_s$  до величины, определяемой соотношением (68), происходит связанный с диссоциацией полувихрей переход в полностью разупорядоченное состояние.

Дипольная энергия в планарной фазе зависит от матрицы трехмерных вращений  $R_{zk}$ , которую удобно параметризовать стандартным образом [267, 268] — с помощью вектора  $\mathbf{n}$ , указывающего направление вращения и угла  $\theta$ , на который производится поворот. Тогда выражение для дипольной энергии, следующее из общей формулы Леггетта [269], принимает вид [49]

$$E_{\text{dip}}^{\text{pl}} = g_{\text{dip}}^{\text{pl}} \left\{ \frac{1}{3} \cos^2 \theta + \frac{3}{8} \left[ (1 - \cos \theta) n_{\parallel}^2 + \frac{4}{3} \cos \theta \right]^2 \right\}, \quad (70)$$

где  $\mathbf{n}_{\parallel} = \mathbf{n} - (\mathbf{n}\hat{z})\hat{z}$  — проекция  $\mathbf{n}$  на плоскость. Минимум (70) достигается при  $\cos \theta = 0$  и  $\mathbf{n} = \pm \hat{z}$ . Все значения  $A_{zk}$ , минимизирующие (70), можно задать при помощи одной и той же матрицы  $R_{zk}$  (поворот на  $\pi/2$  вокруг  $\hat{z}$ ) и различных значений фазы. Это означает, что пространство вырождения сужается до  $S^1$ .

В планарной фазе, так же как и в аксиальной, конечность дипольного взаимодействия приводит к существованию солитонов [49]. В этом случае внутри солитона меняет свое направление на противоположное вектор  $\mathbf{n}$  (что опять-таки эквивалентно повороту фазы на  $\pi$ ). Если  $\xi_{\text{dip}} \gg \xi$ , то из-за неабелевости группы  $\text{SO}(3)$  константа в градиентной энергии, ответственная за флуктуации  $R_{zk}$  (а в конечном итоге и за характерную энергию солитона), сильно ренормируется флуктуациями, аналогично тому как это происходит в аксиальной фазе. Соответствующие ренормгрупповые уравнения могут быть найдены в работах Азария и др. [270, 271], посвященных изучению неколлинеарных антиферромагнетиков.

Вследствие этого в планарной фазе также реализуется ситуация, в рамках которой при повышении температуры первым происходит переход изинговского типа, связанный с обращением в нуль свободной энергии солитонов. Это переход в фазу с экспоненциальным спаданием корреляторов  $A_{zk}$ , но с конечной сверхтекучей плотностью (при  $g_{\text{dip}}^{\text{pl}} = 0$  область существования этой фазы простирается вплоть до нулевой темпера-

туры). При дальнейшем повышении температуры происходит второй фазовый переход, связанный с диссоциацией вихревых пар. Значение скачка сверхтекучей плотности при этом переходе дается тем же выражением (68). По тем же причинам, что и в случае аксиальной фазы, оба фазовых перехода должны происходить при температурах, достаточно близких к температуре перехода в приближении БКШ.

В случае планарной фазы анизотропная часть магнитной энергии может быть представлена в виде

$$E_{\text{magn}}^{\text{pl}} = -\frac{\chi}{2} (H_z R_{zj} \hat{z}_j)^2,$$

при  $\mathbf{H} \parallel \hat{z}$  сводящемся к

$$E_{\text{magn}}^{\text{pl}} = -\frac{\chi}{2} H^2 [\cos \theta - (1 - \cos \theta) n_{\parallel}^2]^2,$$

откуда видно, что и в этом случае энергия солитона уменьшается при приложении магнитного поля, что будет способствовать расщеплению фазового перехода, даже если оно и не имеет места в отсутствие поля.

## 9. XY модель со случайным сдвигом фазы

Как уже упоминалось в разделе 3.1, если число квантов потока на ячейку является целым, решетка джозефсоновских контактов может быть описана XY моделью без фрустрации. Это означает, что при таких условиях в гамильтониане

$$H = \sum_{\langle ij \rangle} V(\varphi_j - \varphi_i - A_{ij}) \quad (71)$$

при помощи калибровочного преобразования могут быть одновременно обращены в нуль все переменные  $A_{ij}$ . Однако подобное упрощение возможно только в том случае, если геометрическая структура решетки является идеально регулярной. Если же площади различных ячеек случайным образом отличаются друг от друга, оказывается невозможным обратить в нуль все переменные  $A_{ij}$  одновременно, даже если среднее число квантов потока на ячейку является целым. В такой ситуации переменные  $A_{ij}$  могут рассматриваться как замороженные (т.е. нефлуктуирующие) случайные переменные, обладающие нулевым средним:

$$\overline{A_{ij}} = 0. \quad (72)$$

В этом случае модель (71) принято называть XY моделью с геометрическим беспорядком (positional disorder [63]) или со случайным сдвигом фазы [58]. В (72) и ниже усреднение по замороженному беспорядку (т.е. по распределению  $A_{ij}$ ) обозначается чертой сверху.

Если изменение площадей ячеек решетки происходит из-за смещения положений джозефсоновских контактов, в то время как положения узлов решетки остаются неизменными (как это показано на рис. 19), то случайные переменные  $A_{ij}$  можно считать не зависящими друг от друга. Если же флуктуируют положения узлов решетки [63, 272–274], то переменные  $A_{ij}$  характеризуются короткодействующими корреляциями, что, однако, не приводит к каким-либо качественным изменениям. По этой причине в дальнейшем для простоты переменные  $A_{ij}$  предполагаются независимыми. Аналитические расчеты

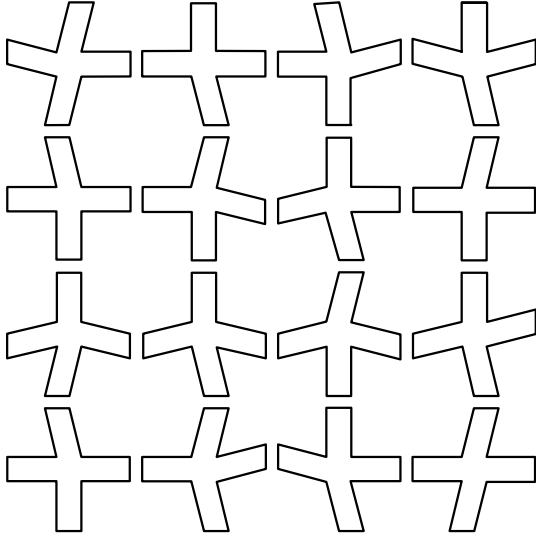


Рис. 19. Квадратная решетка, образованная случайным образом смещенными джозефсоновскими контактами.

обычно производятся в предположении, что распределение  $A_{ij}$  является гауссовым и может быть охарактеризовано единственным параметром  $\sigma$ , определяющим его ширину:

$$\overline{A_{ij}^2} = \sigma. \quad (73)$$

Предел  $\sigma \rightarrow \infty$  соответствует равномерному распределению  $A_{ij}$ . Такой вариант модели (71) известен под названием калибровочного стекла (gauge glass) [275].

Модель (71)–(73) с  $V(\theta) = -J \cos \theta$  была впервые предложена Рубинштейном, Шрайманом и Нельсоном [54] для описания планарных магнетиков, в которых взаимодействие магнитных примесей происходит через немагнитные примеси (случайное взаимодействие Дзялошинского–Мория [64, 65]). Лишь позднее было выяснено [63], что эта же модель применима для описания решеток джозефсоновских контактов с геометрическим беспорядком в присутствии внешнего магнитного поля. Согласно [276] аналогичная модель применима для описания дислокационного плавления двумерного кристалла с замороженными неоднородностями плотности (т.е. примесными атомами).

В отличие от замороженных флуктуаций константы связи, которые при слабом беспорядке заведомо несущественны [54], а при сильном могут привести к изменению рода перехода на первый [277, 278], достаточно сильный геометрический беспорядок приводит к полному разрушению низкотемпературной упорядоченной фазы.

### 9.1. Случайный потенциал

В терминах вихрей наличие случайно распределенных фазовых сдвигов  $A_{ij}$  проявляет себя через возникновение случайного потенциала  $v_{\mathbf{R}}$ , зависящего от  $A_{ij}$ . При этом каждой переменной  $A_{ij}$  может быть сопоставлен замороженный вихревой диполь, а  $v_{\mathbf{R}}$  представляет собой сумму потенциалов всех таких диполей, которые должны считаться не скоррелированными друг с другом. Поскольку в двумерии дипольный потенциал спадает как  $1/R$ , усредненный по беспорядку квадрат  $v_{\mathbf{R}}$  оказывается логарифмически расходящимся с размером системы [54].

В случае если взаимодействие в (71) выбрано в виде взаимодействия Березинского–Виллэна (см. раздел 2.3), величина  $v_{\mathbf{R}}$  может быть найдена точно для любых значений  $A_{ij}$ . При этом статсумма, соответствующая гамильтониану (71), переходит в статсумму двумерного кулоновского газа, описываемого гамильтонианом

$$H_{\text{Cg}} = \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2} m_{\mathbf{R}_1} G_0(\mathbf{R}_1 - \mathbf{R}_2) m_{\mathbf{R}_2} - \sum_{\mathbf{R}} v_{\mathbf{R}} m_{\mathbf{R}}, \quad (74)$$

где потенциал  $v_{\mathbf{R}}$  является распределенной по Гауссу случайной величиной с нулевым средним, корреляции которой в различных узлах дуальной решетки зависят от расстояния между ними так же, как и затравочное взаимодействие вихрей [59]:

$$\overline{v_{\mathbf{R}}} = 0, \quad \overline{v_{\mathbf{R}_1} v_{\mathbf{R}_2}} = \sigma J G_0(\mathbf{R}_1 - \mathbf{R}_2), \quad (75)$$

что означает логарифмическую расходимость коррелятора

$$U(\mathbf{R}_1 - \mathbf{R}_2) \equiv \overline{(v_{\mathbf{R}_1} - v_{\mathbf{R}_2})^2} \quad (76)$$

при  $|\mathbf{R}_1 - \mathbf{R}_2| \rightarrow \infty$ . Например, в случае квадратной решетки [56]

$$U(\mathbf{R}) \approx 4\pi\sigma J^2 \ln |\mathbf{R}|. \quad (77)$$

Это же соотношение справедливо и для непрерывной версии модели, возникающей при включении в (2) случайного векторного потенциала  $A_x(\mathbf{r})$  с

$$\overline{A_x(\mathbf{r}) A_\beta(\mathbf{r}') } = \sigma \delta_{x\beta} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}').$$

Входящая в правую часть (76) разность  $v_{\mathbf{R}_1} - v_{\mathbf{R}_2}$ , представляет собой не что иное, как связанный с беспорядком вклад в энергию вихревой пары, состоящей из положительного вихря, расположенного в точке  $\mathbf{R}_1$ , и отрицательного вихря, расположенного в точке  $\mathbf{R}_2$ . Подчеркнем, что наличие беспорядка не приводит к изменению вида функции  $G_0(\mathbf{R})$ , описывающей взаимодействие вихрей.

### 9.2. Беспорядок и появление неспаренных вихрей

Фазовый переход в обычной XY модели связан с появлением свободных, т.е. не связанных в пары вихрей, возникающих вследствие тепловых флуктуаций. Рассмотрим теперь, не может ли распределенный по Гауссу случайный потенциал, параметры которого определяются соотношениями (75), также приводить к появлению одиночных вихрей, даже если тепловые флуктуации отсутствуют.

Чтобы адекватным образом учесть логарифмическую расходимость различных величин, будем считать, что система имеет конечный линейный размер  $L$ . Это делает конечными как не связанную с беспорядком часть энергии вихря

$$E_v(L) \approx \pi J \ln L, \quad (78)$$

так и ширину распределения

$$\varepsilon(L) \approx J(2\pi\sigma \ln L)^{1/2} \quad (79)$$

случайного вклада в эту энергию  $v_{\mathbf{R}}$ , зависящего от положения центра вихря  $\mathbf{R}$ .

Сравнение (78) с (79) показывает, что в пределе  $L \rightarrow \infty$  типичное значение  $v_{\mathbf{R}}$  становится пренебрежимо малым по сравнению с  $E_v(L)$ . Но это отнюдь не означает, что спонтанное рождение вихрей невозможно. Для того чтобы проверить, является ли появление вихря энергетически выгодным, его собственная энергия  $E_v(L)$  должна сравниваться не с типичным значением  $v_{\mathbf{R}}$  для данного  $L$ , а с максимальным значением  $v_{\mathbf{R}}$  для данной реализации случайного потенциала, т.е. с максимальным выигрышем в энергии  $v_{\max} \equiv \max\{v_{\mathbf{R}}\}$ , к которому может привести рождение вихря.

Простейшая оценка для этой величины может быть получена, если пренебречь корреляциями  $v_{\mathbf{R}}$  в различных узлах дуальной решетки, т.е. предположить, что  $N = L^2$  переменных  $v_{\mathbf{R}}$  являются независимыми случайными величинами, которые характеризуются одним и тем же гауссовым распределением

$$p(v) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\varepsilon} \exp\left[-\frac{v^2}{2\varepsilon^2}\right],$$

ширина которого определяется соотношением (79) и, следовательно, зависит от числа переменных. В этом приближении рассматриваемая система эквивалентна так называемой модели случайных энергий (random energy model) [279], а распределение  $v_{\max}$  может быть найдено точно:

$$P(v_{\max}) = Np(v_{\max}) \left[ \int_{-\infty}^{v_{\max}} dV p(V) \right]^{N-1}. \quad (80)$$

Дифференцирование  $\ln P(v_{\max})$  позволяет установить [60], что при  $N \gg 1$  распределение (80) имеет максимум при

$$v_{\max} = v_{\max}^{(0)} \approx \sqrt{2 \ln N} \varepsilon \quad (81)$$

и является сравнительно узким:

$$\frac{1}{v_{\max}^{(0)}} \left( \frac{v_{\max} - v_{\max}^{(0)}}{v_{\max}^{(0)}} \right)^{1/2} \sim \frac{1}{2 \ln N},$$

вследствие чего среднее значение  $v_{\max}$  оказывается близким к  $v_{\max}^{(0)}$ .

Подстановка (79) в (81) показывает, что  $\overline{v_{\max}}$  логарифмически расходится с размером системы [60]:

$$\overline{v_{\max}}(L) \approx J(8\pi\sigma)^{1/2} \ln L,$$

и, следовательно, средняя энергия вихря, появившегося в наиболее выгодном для этого месте решетки, равна

$$E_{\min}(L) \equiv E_v(L) - \overline{v_{\max}}(L) \approx \pi J \left[ 1 - \left( \frac{\sigma}{\sigma_0} \right)^{1/2} \right] \ln L,$$

где  $\sigma_0 = \pi/8$ . При  $\sigma < \sigma_0$  доминирующую роль играет собственная энергия вихря и его создание требует (в пределе  $L \rightarrow \infty$ ) бесконечной энергии. С другой стороны, при  $\sigma > \sigma_0$  появление вихря в наиболее оптимальном для этого месте приводит к уменьшению энергии системы и, следовательно, спонтанное рождение вихрей [58, 60, 61] оказывается заведомо неизбежным. В [280] аналогичный подход применен для анализа возникновения дислокаций в двумерном кристалле, взаимодействующим со случайным потенциалом.

Учет корреляций между значениями случайного потенциала в различных узлах приводит к уменьшению относительного разброса переменных  $v_{\mathbf{R}}$ , так что найденную выше оценку для  $\overline{v_{\max}}(L)$  следует трактовать как оценку сверху. Это означает, что по крайней мере при  $\sigma < \sigma_0$  система устойчива по отношению к вызванному беспорядком спонтанному рождению вихрей при нулевой температуре. Для того чтобы убедиться, что при достаточно большом значении  $\sigma$  такая неустойчивость действительно возникает, следует построить для  $v_{\max}$  оценку снизу, которая также являлась бы логарифмической.

Один из способов получить такую оценку основан на разделении вкладов в  $v_{\mathbf{R}}$  от разных масштабов [60]. Разобьем нашу систему, состоящую из  $N = L^2$  узлов, на  $M \gg 1$  равных частей и рассмотрим вклад в случайный потенциал, создаваемый внутри каждой из них воздействием со стороны остальных подсистем. Чтобы оценить этот вклад в случайный потенциал, заменим каждую из  $M - 1$  подсистем (окружающих данную) на случайный диполь.

Ширина распределения случайных диполей будет в  $(N/M)^{1/2}$  раз больше, чем равная  $\sigma^{1/2}$  ширина распределения "элементарных" случайных диполей, которые могут быть сопоставлены переменным  $A_{ij}$ . Поскольку линейный размер каждой из подсистем в то же самое число раз превышает постоянную решетку, а дипольный потенциал в двумерии спадает как  $1/R$ , два фактора  $(N/M)^{1/2}$  в выражении для потенциала сокращают друг друга и мы вновь возвращаемся к буквально той же самой задаче, в которой, однако, число узлов  $N$  оказалось замененным на число подсистем  $M$ .

Поэтому, если мы выберем подсистему, внутри которой значение случайного потенциала, создаваемого другими подсистемами, является максимальным, среднее значение этого потенциала будет определяться той же самой функцией  $\overline{v_{\max}}(l)$  (где  $l = M^{1/2}$ ), которую мы, вообще говоря, и пытаемся найти. Однако при таком подходе у нас сохраняется возможность дальнейшей оптимизации положения вихря, теперь уже внутри выбранной на предыдущем шаге подсистемы. Эта оптимизация может быть проведена при помощи применения той же самой процедуры, что приведет к добавлению еще одного слагаемого, равного  $\overline{v_{\max}}(l)$ , в выражение для потенциала. Понятно, что если полная система состоит из  $N \gg M$  узлов, оказывается возможным повторить эту процедуру  $\ln N / \ln M = \ln L / \ln l$  раз, что приводит к выбору узла с

$$v_{\mathbf{R}} \approx v_{\max}^{(1)}(L) = \frac{\ln L}{\ln l} \overline{v_{\max}}(l).$$

В результате, мы построили явный алгоритм выбора узла с достаточно большим значением случайного потенциала, которое оказалось логарифмически зависящим от размера системы. Поскольку этот алгоритм не позволяет определить узел с действительно наибольшим значением  $v_{\mathbf{R}}$ , построенная таким образом функция  $v_{\max}^{(1)}(L)$  представляет собой оценку снизу для  $\overline{v_{\max}}$ . Логарифмическая зависимость этой оценки от  $L$  доказывает, что при  $L \rightarrow \infty$  действительно выполняется зависимость  $\overline{v_{\max}} \propto \ln L$  и, следовательно, существует критическое значение  $\sigma$ , при превышении которого происходит спонтанное рождение не связанных в пары вихрей [60].

Аргументация, основанная на сравнении различных вкладов в энергию вихря, не учитывает тепловых флуктуаций и непосредственно применима лишь в пределе нулевой температуры. При конечной температуре необходимо учитывать также и энтропийный вклад в свободную энергию вихря, который в случае однородной системы является логарифмическим (см. раздел 2.2). Для неоднородной системы энтропия одиночного вихря имеет вид

$$S_v(L) = -\ln \left[ \sum_{\mathbf{R}} \exp \left( -\frac{v_{\max} - v_{\mathbf{R}}}{T} \right) \right]. \quad (82)$$

Поскольку разность между значениями случайного потенциала в различных точках растет с увеличением расстояния между ними, можно ожидать, что результат суммирования в уравнении (82) будет определяться лишь некоторой окрестностью точки, в которой значение  $v(\mathbf{R})$  максимально, т.е. равно  $v_{\max}$ , и, следовательно,  $S_v(L)$  не будет содержать вклада, растущего, как  $\ln L$ . Это означало бы, что критическое значение  $\sigma$  при малой температуре должно оставаться таким же, как и при  $T = 0$ .

### 9.3. Вихревые пары и перенормировка модуля жесткости

Как показано в разделе 2.4, наличие связанных пар вихрей приводит к уменьшению эффективной жесткости и, соответственно, уменьшению области существования фазы, в которой все вихри связаны в пары. Рассмотрим теперь, как этот механизм работает в присутствии случайного потенциала.

Из физического смысла выражения (14) для статвеса вихревой пары следует, что при наличии случайного потенциала оно может быть заменено на

$$W(\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2) = Y^2 \exp \left\{ -\frac{1}{T} [G(0) - G(\mathbf{R}_1 - \mathbf{R}_2) - v_{\mathbf{R}_1} + v_{\mathbf{R}_2}] \right\}, \quad (83)$$

где к собственной энергии вихревой пары добавлена энергия ее взаимодействия с потенциалом. Усреднение (83) по флуктуациям случайного потенциала и подстановка результата в (16) показывают [54], что в этом случае поправка к модулю жесткости, связанная с вихревыми парами, сходится лишь при

$$\frac{2\pi J}{T} - \frac{2\pi\sigma J^2}{T^2} > 4, \quad (84)$$

т.е. в интервале температур

$$T_-(J, \sigma) < T < T_+(J, \sigma), \quad (85)$$

где

$$T_{\pm}(J, \sigma) = 2J\sigma_0 \left[ 1 \pm \left( 1 - \frac{\sigma}{\sigma_0} \right)^{1/2} \right], \quad (86)$$

и расходится при

$$T \rightarrow T_{\pm}(J, \sigma) \mp 0.$$

Та же самая расходимость возникает и при использовании репличного формализма, состоящего в усреднении по беспорядку статистической суммы  $n$  идентичных

реплик рассматриваемой системы, что в пределе  $n \rightarrow 0$  эквивалентно усреднению свободной энергии [281–283]. В репличном представлении взаимодействие зарядов кулоновского газа  $G_0^{ab}(\mathbf{R})$  зависит не только от расстояния между ними  $\mathbf{R}$ , но и от номеров реплик  $a$  и  $b$ , к которым они принадлежат [54]:

$$G_0^{ab}(\mathbf{R}) = G_0(\mathbf{R}) \left( \delta^{ab} - \frac{\sigma J}{T} \right).$$

Отсюда видно, что комбинация, стоящая в левой части неравенства (84), есть не что иное, как предлогарифмический фактор в выражении для энергии нейтральной пары зарядов, принадлежащих к одной и той же реплике.

Из (85), (86) следует, что не только повышение, но и понижение температуры должно приводить к подавлению модуля жесткости, даже если беспорядок является слабым. Обнаружение этого обстоятельства, дополненное построенной на его основе модификацией кosterлицевской ренормгруппы, привели Рубинштейна и соавторов [54] к выводу о том, что при сколь угодно слабом беспорядке в рассматриваемой системе должен происходить так называемый возвратный переход (reentrant transition) в неупорядоченное состояние. Это утверждение, однако, не нашло своего подтверждения ни при экспериментальном исследовании решеток джозефсоновских контактов с геометрическим беспорядком [272], ни при численном моделировании соответствующей XY модели [272–274]. Помимо этого, оно находится в противоречии с теоремой, доказанной Озеки и Нишимори [284] (см. раздел 9.4).

Попытка учета поправок к  $\Gamma$  более высокого порядка по  $Y$ , чем рассмотренная в [54], продемонстрировала возникновение новой расходимости [56] в каждом следующем порядке разложения по  $Y^2$ , которое, казалось бы, должно быть применимо в области существования упорядоченной фазы. Возникновение таких расходимостей особенно очевидно при применении репличного подхода, в рамках которого оно обусловлено существованием не только нейтральных пар, состоящих из одиночных зарядов (относящихся к одной и той же реплике), но и более сложных объектов — нейтральных пар, образованных многочастичными комплексами, состоящими из  $k > 1$  связанных друг с другом зарядов одного знака, относящихся к различным репликам. Предлогарифмический фактор в выражении для энергии пары таких комплексов имеет вид [55, 56]

$$2\pi \left( \frac{J}{T} k - \frac{\sigma J^2}{T^2} k^2 \right),$$

откуда следует, что при любых значениях параметров все поправки к  $\Gamma$ , соответствующие достаточно большим  $k$ , являются расходящимися.

Наличие такого набора расходимостей означает [56], что область существования упорядоченной фазы либо вообще отсутствует (а ее наблюдение в [272–274] следует интерпретировать как эффект конечного размера), либо не может быть найдена при помощи метода, предложенного в [54] и получившего свое дальнейшее развитие в [55–57]. Оказывается, что возникающие проблемы связаны с использованием формального разложения по степеням химической активности  $Y$ , тогда как более адекватным подходом является разложение по концентрации вихревых пар [59].

С физической точки зрения понятно, что простейшая поправка к взаимодействию вихрей в упорядоченной фазе (если таковая фаза вообще существует) представляет собой поправку от связанных вихревых пар и пропорциональна их плотности. При этом вклады от различных пар в эту поправку могут считаться не скоррелированными друг с другом.

При наличии случайного потенциала функция  $\Sigma(\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2)$ , определяющая, согласно (11), величину флуктуационной поправки к взаимодействию зарядов кулоновского газа, представляет собой неприводимую часть корреляционной функции зарядов этого газа [54, 59]:

$$\Sigma(\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2) = \langle m_{\mathbf{R}_1} m_{\mathbf{R}_2} \rangle - \langle m_{\mathbf{R}_1} \rangle \langle m_{\mathbf{R}_2} \rangle. \quad (87)$$

В отсутствие беспорядка  $\langle m_{\mathbf{R}} \rangle = 0$  и второе слагаемое в (87) исчезает. Выражение (87) может быть также представлено в виде второй производной от свободной энергии [59]:

$$\Sigma(\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2) = -T \frac{\partial^2 F}{\partial v_{\mathbf{R}_1} \partial v_{\mathbf{R}_2}}. \quad (88)$$

Подчеркнем, что соотношения (87) и (88) являются точными. Их вывод не требует каких-либо приближений или усреднения по беспорядку.

В наинишем порядке по концентрации вихревых пар вклады в правую часть (88) от различных пар могут считаться не зависящими друг от друга. Следовательно, при вычислении  $\Sigma(\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2)$  можно пренебречь взаимодействием между зарядами, принадлежащими различным парам. В этом приближении статсумма кулоновского газа, находящегося в фазе, в которой все заряды образуют связанные пары, может быть аппроксимирована выражением [59]

$$Z_{Cg} = \prod_{(\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2)} [1 + W(\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2) + W(\mathbf{R}_2, \mathbf{R}_1)], \quad (89)$$

где  $W(\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2)$  имеет вид (83), а произведение берется по всем парам узлов дуальной решетки.

Структура (89) предполагает, что для каждой пары узлов  $(\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2)$  рассматриваются три возможных варианта: отсутствие вихревой пары, наличие вихря с топологическим зарядом  $+1$  в точке  $\mathbf{R}_1$  и вихря с противоположным зарядом в точке  $\mathbf{R}_2$ , а также присутствие вихревой пары с обратной поляризацией. В статсумме (89) учтено как взаимодействие всех вихрей со случайным потенциалом, так и взаимодействие друг с другом вихрей, принадлежащих одной и той же паре. Неучтенным остается лишь взаимодействие вихрей, относящихся к различным парам.

Подстановка  $F_{Cg} = -T \ln Z_{Cg}$  в (88) и дифференцирование по  $v_{\mathbf{R}_1}$  и  $v_{\mathbf{R}_2}$  позволяют (при  $\mathbf{R}_1 \neq \mathbf{R}_2$ ) представить  $\Sigma(\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2)$  в виде

$$\Sigma(\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2) = -2W_*(\mathbf{R}, v), \quad (90)$$

где  $\mathbf{R} = \mathbf{R}_1 - \mathbf{R}_2$ ,  $v = v_{\mathbf{R}_1} - v_{\mathbf{R}_2}$ ,

$$W_*(\mathbf{R}, v) = -\frac{T}{2} \frac{\partial}{\partial v} \left[ \frac{W(\mathbf{R}, v) - W(\mathbf{R}, -v)}{1 + W(\mathbf{R}, v) + W(\mathbf{R}, -v)} \right], \quad (91)$$

а  $W(\mathbf{R}, v)$  имеет вид (83). В то же время вид  $\Sigma(\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2)$  при  $\mathbf{R}_1 = \mathbf{R}_2$  следует из соотношения

$$\sum_{\mathbf{R}_2} \Sigma(\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2) = 0,$$

обусловленного тем, что все вихри связаны в нейтральные пары. Входящая в (90), (91) случайная переменная  $v \equiv v_{\mathbf{R}_1} - v_{\mathbf{R}_2}$  характеризуется гауссовым распределением, ширина которого определяется соотношением (77) и зависит только от разности  $\mathbf{R} = \mathbf{R}_1 - \mathbf{R}_2$ , но не от  $\mathbf{R}_1$  и  $\mathbf{R}_2$  по отдельности.

Подстановка (90) в (11) показывает, что при наличии случайного потенциала в выражении (16) для поправки к модулю жесткости  $W(\mathbf{R})$  следует заменить на  $\overline{W}_*(\mathbf{R}, v)$ :

$$\delta\Gamma = -\frac{2\pi^2\Gamma^2}{T} \sum_{\mathbf{R}} R^2 \overline{W}_*(\mathbf{R}, v). \quad (92)$$

В пределе  $R \rightarrow \infty$  результат усреднения  $W_*(\mathbf{R}, v)$  по беспорядку характеризуется степенным поведением [59]:

$$\overline{W}_*(\mathbf{R}, v) \approx B(T) R^{-K(T)}, \quad (93)$$

однако температурная зависимость параметров в (93) оказывается существенно различной в различных областях температур. При  $T > T_*(J, \sigma) \equiv 2J\sigma$

$$B(T) = \frac{2}{T}, \quad K(T) = 2\pi \left( \frac{J}{T} - \frac{\sigma J^2}{T^2} \right), \quad (94)$$

а при  $T < T_*(J, \sigma)$

$$B(T) = \frac{\pi T/T_*}{\sin(\pi T/T_*)} \frac{1}{\pi J \sqrt{2\sigma \ln R}}, \quad K(T) = \frac{\pi}{2\sigma}. \quad (95)$$

Зависимости, описываемые уравнениями (94), совпадают с найденными Рубинштейном и др. [54]. В терминах описанного выше подхода приближение, использованное в [54], соответствует замене знаменателя в правой части (91) на единицу. Как показывает более последовательный анализ, подобный подход оказывается оправданным лишь при  $T > T_*$ , тогда как при  $T < T_*$  необходим учет полного вида знаменателя. Интересно, что попытка разложения

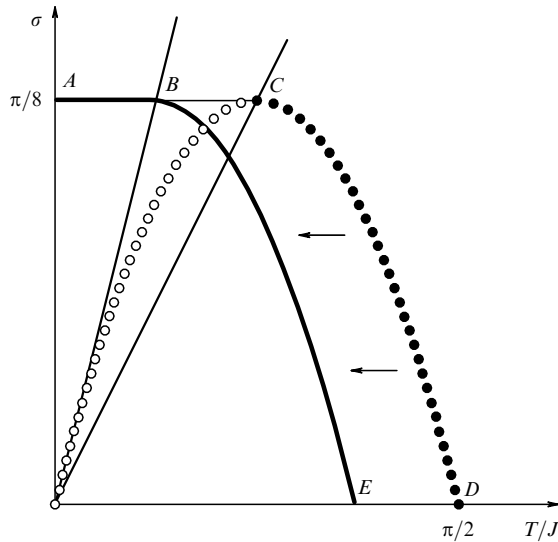
$$\frac{1}{1 + W(\mathbf{R}, v) + W(\mathbf{R}, -v)}$$

в ряд по степеням  $W(\mathbf{R}, v) + W(\mathbf{R}, -v)$ , т.е. по степеням  $Y^2$ , приводит к воспроизведению всего набора расходимостей, обнаруженных в [55, 56]. Таким образом, использование разложения по концентрации вихревых пар представляет собой способ эффективного суммирования этого набора расходимостей.

#### 9.4. Структура фазовой диаграммы

Подстановка (93)–(95) в (91) показывает, что при  $T > T_*(J, \sigma)$  поправка к модулю жесткости становится расходящейся при  $T = T_+(J, \sigma) = 2J\sigma_0(1 + \sqrt{1 - \sigma/\sigma_0})$  (т.е. на линии  $CD$  на рис. 20), тогда как при более низких температурах ( $T < T_*(J, \sigma)$ ) область сходимости ограничена линией  $\sigma = \sigma_0 = \pi/8$  (линия  $AC$  на рис. 20), параллельной оси температур [58, 59].

Это определяет область стабильности упорядоченной фазы в пределе нулевой химической активности (что соответствует большой энергии кора). Если же энергия кора не слишком велика (либо равна нулю) следует учесть эффекты ренормировки, что приводит к уменьшению области стабильности упорядоченной фазы. Поскольку в рассматриваемом приближении перенорми-



**Рис. 20.** В пределе нулевой химической активности область стабильности упорядоченной фазы расположена под линией  $ABCD$ . Эффекты ренормировки приводят к сдвигу искривленной части линии фазового перехода в область более низких температур.

руется только модуль жесткости, а параметр  $\sigma$ , характеризующий беспорядок, остается без изменений [59], положение низкотемпературной части линии фазовых переходов ( $\sigma = \sigma_0$ ) должно остаться тем же, тогда как искривленная часть этой же линии ( $CD$ ) сдвинется в область более низких температур ( $BE$ ). Структура фазовой диаграммы, показанной на рис. 20, находится в согласии с результатами как численного моделирования [272–274, 285], так и экспериментальных исследований [272].

Напомним, что рассмотрение возможности появления одиночных вихрей (см. раздел 9.2) также приводит к выводу о том, что при низких температурах  $\sigma_c$  (критическое значение  $\sigma$ ) не зависит от температуры. Более того, значения  $\sigma_c$ , полученные двумя методами, совпадают друг с другом. В то же время учет в ренормгрупповых уравнениях дополнительных слагаемых приводит к заключению [61, 62], что при  $T < T_*$  величина  $\sigma$  является перенормируемой, что в свою очередь должно привести к некоторой зависимости  $\sigma_c$  от температуры и в области низких температур. Такой вывод, однако, находится в противоречии с результатами теоремы, доказанной Озеки и Нишимори [284]. Поскольку согласно этой теореме линия фазовых переходов (если таковая вообще существует) при  $T < J\sigma$  должна быть параллельна оси температур, на рис. 20 показано, что эффекты, связанные с ренормировкой, приводят к сдвигу сингулярной точки, разделяющей линию фазовых переходов на две части, из точки  $C$  в точку  $B$ , где линия  $\sigma = \sigma_0$  пересекает линию  $T = J\sigma$ .

Правая часть линии фазовых переходов (сегмент  $BE$  на рис. 20) соответствует значениям параметров, при которых знаменатель в (91) несуществен, поэтому для описания критического поведения на этой линии могут использоваться [58, 61, 62] ренормгрупповые уравнения, выведенные в [54]. Они не приводят к изменению критического поведения по сравнению с чистым случаем ( $\sigma = 0$ ), однако значение скачка  $\Gamma$  в точке перехода становится неуниверсальным.

В работах Карпентье и Лё Дуссалья [286, 287] было показано, что описание фазового перехода на линии  $AB$  в терминах перенормировки конечного числа параметров (например,  $\sigma$  и  $\Gamma$ ) не является достаточно адекватным, поскольку не ухватывает весьма нетривиальную перенормировку функции распределения энергии кора вихрей, которая оказывается негауссовской. Явный учет такой перенормировки позволил этим авторам продемонстрировать [287], что при  $T = 0$  фазовый переход происходит при значении  $\sigma = \sigma_0 = \pi/8$ , следующем из простых оценок, не учитывающих каких-либо перенормировок (см. раздел 9.2), однако обобщение этого результата на  $T > 0$  остается предметом дальнейших исследований. При этом данные численных экспериментов Манкурта и Гремшеля [285] свидетельствуют, что в широком интервале температур  $0,392 < \sigma_c(T) < 0,393$ , т.е. сдвиг  $\sigma_c$  относительно  $\sigma_0 = \pi/8 \approx 0,3927$ , если и существует, то является чрезвычайно малым.

Интересно, что если среднее число квантов потока на ячейку является *полуцелым*, то сколь угодно слабый геометрический беспорядок приводит к разрушению упорядочения по киральностям [288]. Влияние такого беспорядка оказывается аналогично влиянию случайного поля в двумерной модели Изинга, которое, как известно [289–292], приводит к разрушению упорядочения при сколь угодно малой его амплитуде.

## 10. Заключение

Основной задачей настоящего обзора являлось дать читателю общее представление о широком круге проблем, возникающих при изучении характера и последовательности фазовых переходов в двумерных системах с непрерывным вырождением в ситуациях, когда знание симметрии системы оказывается недостаточным для определения количества и типа происходящих в ней фазовых переходов, а также о методах, применяемых для их решения.

Наиболее адекватным подходом к анализу подобных проблем является построение классификации топологических возбуждений и изучение взаимного влияния между различными классами таких возбуждений. Это позволяет установить, что даже в системах с одним и тем же симметричным вырождением возможны различные последовательности фазовых переходов, выбор между которыми зависит от соотношения параметров взаимодействия, а также от типа решетки. При этом весьма часто оказывается, что структура упорядочения в низкотемпературной фазе связана со снятием случайного вырождения основного состояния малыми флуктуациями непрерывных степеней свободы. В обзоре также обсуждается роль взаимодействия точечных топологических возбуждений (вихрей) со случайным потенциалом, вызванным геометрическими неоднородностями.

Не вызывает сомнения, что исследование двумерных систем с непрерывным вырождением будет активно продолжаться и далее. К настоящему времени конкретная последовательность фазовых переходов установлена лишь для весьма ограниченного круга однородно фрустрированных XY моделей (часть из которых подробно обсуждается в настоящем обзоре), поэтому немалый интерес представляет достижение понимания того, насколько общей является классификация возможных сценариев [28], изложенная в разделе 4.4. В частности,

остается загадкой, каким образом выявленные при численном моделировании [138] свойства модели с  $f = 1/3$  и квадратной решеткой согласуются с этой классификацией.

Не меньший интерес представляет изучение систем, характеризующихся при низких температурах стекловидным поведением [293–295], возникающим несмотря на отсутствие каких-либо неоднородностей. С другой стороны, исследование влияния неоднородностей на свойства систем с комбинированным вырождением до сих пор было сосредоточено на максимально фрустрированной XY модели на квадратной решетке [288, 296–300] и совершенно не очевидно, являются ли полученные выводы хотя в какой-либо степени универсальными или же применимы лишь для данной конкретной модели.

Таким образом, спектр проблем, требующих дальнейшего исследования, остается весьма широким.

### Список литературы

1. Березинский В Л *ЖЭТФ* **59** 907 (1970)
2. Березинский В Л *ЖЭТФ* **61** 1144 (1971)
3. Kosterlitz J M, Thouless D J *J. Phys. C: Solid State Phys.* **5** L124 (1972)
4. Kosterlitz J M, Thouless D J *J. Phys. C: Solid State Phys.* **6** 1181 (1973)
5. Kosterlitz J M *J. Phys. C: Solid State Phys.* **7** 1046 (1974)
6. Nelson D R, Kosterlitz J M *Phys. Rev. Lett.* **39** 1201 (1977)
7. Beasley M R, Mooij J E, Orlando T P *Phys. Rev. Lett.* **42** 1165 (1979)
8. Nelson D R, Pelcovits R A *Phys. Rev. B* **16** 2191 (1977)
9. Halperin B I, Nelson D R *Phys. Rev. Lett.* **41** 121, 519 (1978)
10. Nelson D R, Halperin B I *Phys. Rev. B* **19** 2457 (1979)
11. Young A P *Phys. Rev. B* **19** 1855 (1979)
12. Kosterlitz J M, Thouless D J, in *Progress in Low Temperature Physics* Vol. VII B (Ed. D F Brewer) (Amsterdam: North-Holland, 1978) p. 371
13. Nelson D R, in *Fundamental Problems in Statistical Mechanics V: Proc. of the 5th Intern. Summer School, Enschede, The Netherlands, June 23–July 5, 1980* (Ed. E G D Cohen) (Amsterdam: North-Holland, 1980) p. 53
14. Nelson D R, in *Phase Transitions and Critical Phenomena* Vol. 7 (Eds C Domb, J L Lebowitz) (London: Academic Press, 1983) p. 1
15. Minnhagen P *Rev. Mod. Phys.* **59** 1001 (1987)
16. Ефетов К Б *ЖЭТФ* **78** 2017 (1980)
17. Lozovik Yu E, Akopov S G *J. Phys. C: Solid State Phys.* **14** L31 (1981)
18. Teitel S, Jayaprakash C *Phys. Rev. Lett.* **51** 1999 (1983)
19. Villain J J *J. Phys. C: Solid State Phys.* **10** 1717 (1977)
20. Teitel S, Jayaprakash C *Phys. Rev. B* **27** 598 (1983)
21. Halsey T C *J. Phys. C: Solid State Phys.* **18** 2437 (1985)
22. Korshunov S E *J. Stat. Phys.* **43** 17 (1986)
23. Lee J-R et al. *Phys. Rev. Lett.* **79** 2172 (1997)
24. Korshunov S E *Phys. Rev. Lett.* **88** 167007 (2002)
25. Franzese G, Cataudella V, Korshunov S E, Fazio R *Phys. Rev. B* **62** R9287 (2000)
26. Cataudella V, Franzese G, Korshunov S E, Fazio R *Physica B* **284–288** 431 (2000)
27. Alexander S, Pincus P *J. Phys. A: Math. Gen.* **13** 263 (1980)
28. Korshunov S E, Uimin G V *J. Stat. Phys.* **43** 1 (1986)
29. Lee D H et al. *Phys. Rev. Lett.* **52** 433 (1984); *Phys. Rev. B* **33** 450 (1986)
30. Kawamura H *J. Phys. Soc. Jpn.* **53** 2452 (1984)
31. Коршунов С Е *Письма в ЖЭТФ* **41** 525 (1985)
32. Korshunov S E *J. Phys. C: Solid State Phys.* **19** 5927 (1986)
33. Гехт Р С, Бондаренко И Н *ЖЭТФ* **113** 2209 (1998)
34. Korshunov S E *Phys. Rev. B* **65** 054416 (2002)
35. Huse D A, Rutenberg A D *Phys. Rev. B* **45** 7536 (1992)
36. Korshunov S E, Douçot B *Phys. Rev. Lett.* **93** 097003 (2004)
37. Park K, Huse D A *Phys. Rev. B* **64** 134522 (2001)
38. Chetkelatchev N M et al. *Письма в ЖЭТФ* **74** 357 (2001)
39. Barash Yu S, Bobkova I V *Phys. Rev. B* **65** 144502 (2002)
40. Golubov A A, Kupriyanov M Yu, Fominov Ya V *Письма в ЖЭТФ* **75** 709 (2002)
41. Булаевский Л Н, Кузий В В, Собянин А А *Письма в ЖЭТФ* **25** 314 (1977)
42. Буздин А И, Булаевский Л Н, Панюков С В *Письма в ЖЭТФ* **35** 147 (1982)
43. Буздин А И, Вуйичич Б, Куприянов М Ю *ЖЭТФ* **101** 231 (1992)
44. Коршунов С Е *Письма в ЖЭТФ* **41** 216 (1985)
45. Korshunov S E *J. Phys. C: Solid State Phys.* **19** 4427 (1986)
46. Lee D H, Grinstein G *Phys. Rev. Lett.* **55** 541 (1985)
47. Ioffe L B, Feigel'man M V *Phys. Rev. B* **66** 224503 (2002)
48. Douçot B, Feigel'man M V, Ioffe L B *Phys. Rev. Lett.* **90** 107003 (2003)
49. Коршунов С Е *ЖЭТФ* **89** 531 (1985)
50. Fujita T et al. *Prog. Theor. Phys.* **64** 396 (1980)
51. Брюсов П Н, Попов В Н *ЖЭТФ* **80** 1564 (1981)
52. Brusov P N, Popov V N *Phys. Lett. A* **87** 472 (1982)
53. Tešanović Z *Phys. Lett. A* **100** 158 (1984)
54. Rubinstein M, Shraiman B, Nelson D R *Phys. Rev. B* **27** 1800 (1983)
55. Korshunov S E *Helv. Phys. Acta* **65** 492 (1992)
56. Korshunov S E *Phys. Rev. B* **48** 1124 (1993)
57. Mudry C, Wen X-G *Nucl. Phys. B* **549** 613 (1999)
58. Nattermann T, Scheidl S, Korshunov S E, Li M S *J. Phys. I (France)* **5** 565 (1995)
59. Korshunov S E, Nattermann T *Phys. Rev. B* **53** 2746 (1996)
60. Korshunov S E, Nattermann T *Physica B* **222** 280 (1996)
61. Tang L-H *Phys. Rev. B* **54** 3350 (1996)
62. Scheidl S *Phys. Rev. B* **55** 457 (1997)
63. Granato E, Kosterlitz J M *Phys. Rev. B* **33** 6533 (1986)
64. Dzyaloshinsky I *J. Phys. Chem. Solids* **4** 241 (1958)
65. Moriya T *Phys. Rev. Lett.* **4** 228 (1960); *Phys. Rev.* **120** 91 (1960)
66. Wegner F Z *Phys. B* **206** 465 (1967)
67. Pearl J, in *Proc. of the Ninth Intern. Conf. on Low Temperature Physics, 1964 (LT-9)* (Eds J G Daunt et al.) (New York: Plenum Press, 1965) p. 566
68. Fisher M E, Barber M N, Jasnow D *Phys. Rev. A* **8** 1111 (1973)
69. Ландау Л Д *ЖЭТФ* **7** 627 (1937); *Собрание трудов* Т. 1 (М.: Наука, 1969) статья № 29
70. Peierls R E *Ann. Inst. Henri Poincaré* **5** 177 (1937)
71. Mermin N D, Wagner H *Phys. Rev. Lett.* **17** 1133 (1966)
72. Mermin N D *Phys. Rev.* **176** 250 (1968)
73. Hohenberg P C *Phys. Rev.* **158** 383 (1967)
74. Березинский В Л, Дисс. ... канд. физ.-мат. наук (М: ИТФ им. Л.Д. Ландау, 1971)
75. Villain J J *J. Phys. (Paris)* **36** 581 (1975)
76. José J V et al. *Phys. Rev. B* **16** 1217 (1977)
77. Ohta T, Jasnow D *Phys. Rev. B* **20** 139 (1979)
78. Anderson P W, Yuval G, Hamann D R *Phys. Rev. B* **1** 4464 (1970)
79. Tobochnik J, Chester G V *Phys. Rev. B* **20** 3761 (1979)
80. Fernández J F, Ferreira M F, Stankiewicz J *Phys. Rev. B* **34** 292 (1986)
81. Weber H, Minnhagen P *Phys. Rev. B* **37** 5986 (1988)
82. Gupta R et al. *Phys. Rev. Lett.* **61** 1996 (1988)
83. Olsson P *Phys. Rev. B* **52** 4526 (1995)
84. Shih W Y, Stroud D *Phys. Rev. B* **30** 6774 (1984)
85. Ferer M, Velgakis M J *Phys. Rev. B* **27** 314 (1983)
86. Butera P, Comi M *Phys. Rev. B* **50** 3052 (1994)
87. Knops H J F *Phys. Rev. Lett.* **39** 766 (1977)
88. Weeks J D, in *Ordering in Strongly Fluctuating Condensed Matter Systems* (Ed. T Riste) (New York: Plenum Press, 1980) p. 293
89. Chui S T, Weeks J D *Phys. Rev. B* **14** 4978 (1976)
90. van der Eerden J P, Knops H J F *Phys. Lett. A* **66** 334 (1978)
91. Swendsen R H *Phys. Rev. B* **17** 3710 (1978)
92. van Beijeren H *Phys. Rev. Lett.* **38** 993 (1977)
93. Rys F *Helv. Phys. Acta* **36** 537 (1963)
94. Lieb E H *Phys. Rev. Lett.* **18** 1046 (1967)
95. Lieb E H, Wu F Y, in *Phase Transitions and Critical Phenomena* Vol. 1 (Eds C Domb, M S Green) (London: Academic Press, 1972) p. 331
96. Wiegmann P B *J. Phys. C: Solid State Phys.* **11** 1583 (1978)
97. Ohta T *Prog. Theor. Phys.* **60** 968 (1978)
98. Amit D J, Goldschmidt Y Y, Grinstein S J *J. Phys. A: Math. Gen.* **13** 585 (1980)



99. Stroud D, Kivelson S *Phys. Rev. B* **35** 3478 (1987)
100. Newrock R S et al., in *Solid State Physics* Vol. 54 (Eds H Ehrenreich, F Spaepen) (San Diego: Academic Press, 2000) p. 263
101. Martinoli P, Leemann C *J. Low Temp. Phys.* **118** 699 (2000)
102. Vallat A, Korshunov S E, Beck H *Phys. Rev. B* **43** 8482 (1991)
103. Vallat A, Beck H *Phys. Rev. B* **50** 4015 (1994)
104. Fradkin E, Huberman B, Shenker S H *Phys. Rev. B* **18** 4789 (1978)
105. Kanō K, Naya S *Prog. Theor. Phys.* **10** 158 (1953)
106. Horiguchi T, Chen C C *J. Math. Phys.* **15** 659 (1974)
107. Sutherland B *Phys. Rev. B* **34** 5208 (1986)
108. Shih W Y, Stroud D *Phys. Rev. B* **32** 158 (1985)
109. Teitel S, Jayaprakash C *J. Phys. Lett. (Paris)* **46** L33 (1985)
110. Korshunov S E *Phys. Rev. B* **63** 134503 (2001)
111. Xiao Y et al. *Phys. Rev. B* **65** 214503 (2002)
112. Korshunov S E, Douçot B *Phys. Rev. B* **70** 134507 (2004)
113. Korshunov S E *Phys. Rev. B* **71** 174501 (2005)
114. Straley J P, Morozov A Y, Kolomeisky E B *Phys. Rev. Lett.* **79** 2534 (1997)
115. Franz M, Teitel S *Phys. Rev. Lett.* **73** 480 (1994); *Phys. Rev. B* **51** 6551 (1995)
116. Hattel S, Wheatley J *Phys. Rev. B* **50** 16590 (1994)
117. Hattel S A, Wheatley J M *Phys. Rev. B* **51** 11951 (1995)
118. Onsager L *Phys. Rev.* **65** 117 (1944)
119. Вдовиченко Н В *ЖЭТФ* **47** 715 (1964)
120. Kramers H A, Wannier G H *Phys. Rev.* **60** 252 (1941)
121. Thijssen J M, Knops H J F *Phys. Rev. B* **37** 7738 (1988)
122. Thijssen J M *Phys. Rev. B* **40** 5211 (1989)
123. Korshunov S E *Phys. Rev. Lett.* **94** 087001 (2005)
124. Berge B et al. *Phys. Rev. B* **34** 3177 (1986)
125. Eikmans H et al. *Phys. Rev. B* **39** 11759 (1989)
126. Bulgadaev S A *Phys. Lett. A* **86** 213 (1981); Булгадаев С А *ТМФ* **51** 424 (1982)
127. Lee S J, Lee J-R, Kim B *Phys. Rev. E* **51** R4 (1995)
128. Olsson P, Teitel S *Phys. Rev. B* **71** 104423 (2005)
129. Coniglio A et al. *J. Phys. A: Math. Gen.* **10** 205 (1977)
130. Stella A L, Vanderzande C *Phys. Rev. Lett.* **62** 1067 (1989)
131. Vanderzande C, Stella A L *J. Phys. A: Mat. Gen.* **22** L445 (1989)
132. Stauffer D *Phys. Rep.* **54** 1 (1979)
133. Klein W et al. *Phys. Rev. Lett.* **41** 1145 (1978)
134. Доценко Вик. С, Уймин Г В *Письма в ЖЭТФ* **40** 236 (1984)
135. Dotsenko V S, Uimin G V *J. Phys. C: Solid State Phys.* **18** 5019 (1985)
136. Lee J, Kosterlitz J M, Granato E *Phys. Rev. B* **43** 11531 (1991)
137. Lee Y-H, Teitel S *Phys. Rev. Lett.* **65** 2595 (1990)
138. Denniston C, Tang C *Phys. Rev. Lett.* **79** 451 (1997); *Phys. Rev. B* **58** 6591 (1998)
139. Nicolaidis D B *J. Phys. A: Math. Gen.* **24** L231 (1991)
140. Ramirez-Santiago G, José J V *Phys. Rev. Lett.* **68** 1224 (1992); *Phys. Rev. B* **49** 9567 (1994)
141. Lee S, Lee K-C *Phys. Rev. B* **49** 15184 (1994)
142. Ozeki Y, Ito N *Phys. Rev. B* **68** 054414 (2003)
143. Olsson P *Phys. Rev. Lett.* **75** 2758 (1995)
144. Olsson P *Phys. Rev. Lett.* **77** 4850 (1996)
145. Cataudella V, Nicodemi M *Physica A* **233** 293 (1996)
146. Olsson P *Phys. Rev. B* **55** 3585 (1997)
147. Grest G S *Phys. Rev. B* **39** 9267 (1989)
148. Lee J-R *Phys. Rev. B* **49** 3317 (1994)
149. Granato E, Nightingale M P *Phys. Rev. B* **48** 7438 (1993)
150. Bouabkeur E H, Diep H T *Phys. Rev. B* **58** 5163 (1998)
151. Luo H J, Schülke L, Zheng B *Phys. Rev. Lett.* **81** 180 (1998); *Phys. Rev. E* **57** 1327 (1998)
152. Lee S et al. *Phys. Rev. B* **60** 9256 (1999)
153. Yosefin M, Domany E *Phys. Rev. B* **32** 1778 (1985)
154. Granato E *J. Phys. C: Solid State Phys.* **20** L215 (1987)
155. Granato E et al. *Phys. Rev. Lett.* **66** 1090 (1991)
156. Lee J, Granato E, Kosterlitz J M *Phys. Rev. B* **44** 4819 (1991)
157. Nightingale M P, Granato E, Kosterlitz J M *Phys. Rev. B* **52** 7402 (1995)
158. Lee S, Lee K-C, Kosterlitz J M *Phys. Rev. B* **56** 340 (1997)
159. den Nijs M *Phys. Rev. B* **46** 10386 (1992)
160. Davidson D, den Nijs M *Phys. Rev. E* **55** 1331 (1997)
161. Lerch Ph et al. *Phys. Rev. B* **41** 11579 (1990)
162. Martinoli P et al. *Phys. Scripta* **T49** 176 (1993)
163. van Wees B J, van der Zant H S J, Mooij J E *Phys. Rev. B* **35** 7291 (1987)
164. van der Zant H S J, Rijken H A, Mooij J E *J. Low Temp. Phys.* **82** 67 (1991)
165. van der Zant H S J, Geerligs L J, Mooij J E *Europhys. Lett.* **19** 541 (1992)
166. van der Zant H S J et al. *Phys. Rev. Lett.* **69** 2971 (1992)
167. van der Zant H S J et al. *Phys. Rev. B* **54** 10081 (1996)
168. Feigel'man M V, Larkin A I *Chem. Phys.* **235** 107 (1998)
169. Feigel'man M V, Larkin A I, Skvortsov M A *Phys. Rev. Lett.* **86** 1869 (2001); in *Mesoscopic and Strongly Correlated Electron Systems "Chernogolovka 2000": Proc. of the Intern. Conf., Chernogolovka, Moscow Region, Russian Federation, 9–16 July 2000; Usp. Fiz. Nauk (Suppl.)* **99** (2001)
170. Deutscher G, de Gennes P G, in *Superconductivity* Vol. 2 (Ed. R D Parks) (New York: M. Dekker, 1969) p. 1005
171. Villain J et al. *J. Phys. (Paris)* **41** 1263 (1980)
172. Шендер Е Ф *ЖЭТФ* **83** 326 (1982)
173. Choi M Y, Stroud D *Phys. Rev. B* **32** 5773 (1985)
174. Chen Q-H, Luo M-B, Jiao Z-K *Phys. Rev. B* **64** 212403 (2001)
175. Miyashita S, Shiba J *J. Phys. Soc. Jpn.* **53** 1145 (1984)
176. Lee D H et al. *Phys. Rev. B* **29** 2680 (1984)
177. Wannier G H *Rev. Mod. Phys.* **17** 50 (1945)
178. Wannier G H *Phys. Rev.* **79** 357 (1950); *Phys. Rev. B* **7** 5017 (1973)
179. Husimi K, Syōzi I *Prog. Theor. Phys.* **5** 177, 341 (1950)
180. Van Himbergen J E *Phys. Rev. B* **33** 7857 (1986)
181. Xu H-J, Southern B W *J. Phys. A: Math. Gen.* **29** L133 (1996)
182. Lee S, Lee K-C *Phys. Rev. B* **57** 8472 (1998)
183. Rastelli E et al. *Phys. Rev. B* **45** 7936 (1992)
184. Baxter R J *J. Phys. A: Math. Gen.* **13** L61 (1980)
185. Pokrovsky V L, Uimin G V *Phys. Lett. A* **45** 467 (1973); Покровский В Л, Уймин Г В *ЖЭТФ* **65** 1691 (1973)
186. Riedel E K *Physica A* **106** 110 (1981)
187. Nienhuis B, Riedel E K, Schick M *Phys. Rev. B* **27** 5625 (1983)
188. Kim D, Levy P M, Uffer L F *Phys. Rev. B* **12** 989 (1975)
189. Aharony A *J. Phys. A: Math. Gen.* **10** 389 (1977)
190. Baxter R J *J. Phys. C: Solid State Phys.* **6** L445 (1973)
191. Chubukov A V, Golosov D I *J. Phys.: Condens. Matt.* **3** 69 (1991)
192. Suzuki N, Matsubara F *Phys. Rev. B* **55** 12331 (1997)
193. Kawamura H, Miyashita S *J. Phys. Soc. Jpn.* **54** 4530 (1985)
194. Голосов Д И, Чубуков А В *Письма в ЖЭТФ* **50** 416 (1989)
195. Zhitomirsky M E *Phys. Rev. Lett.* **88** 057204 (2002)
196. Cabra D C et al. *Phys. Rev. B* **65** 094418 (2002)
197. Hida K *J. Phys. Soc. Jpn.* **70** 3673 (2001)
198. Suematsu H et al. *Solid State Commun.* **40** 241 (1981)
199. Svistov L E et al. *Phys. Rev. B* **67** 094434 (2003)
200. Свистов Л Е и др. *Письма в ЖЭТФ* **81** 133 (2005)
201. Ono T et al. *Phys. Rev. B* **67** 104431 (2003)
202. Wang R, Bradley W F, Steinfink H *Acta Crystallogr.* **18** 249 (1965)
203. Bonnin A, Lecerc A C R. *Acad. Sci. (Paris)* **262** 1782 (1966)
204. Townsend M G, Longworth G, Roudaut E *Phys. Rev. B* **33** 4919 (1986)
205. Wills A S et al. *Phys. Rev. B* **61** 6156 (2000)
206. Wills A S et al. *Phys. Rev. B* **62** R9264 (2000)
207. Obradors X et al. *Solid State Commun.* **65** 189 (1988)
208. Ramirez A P, Espinosa G P, Cooper A S *Phys. Rev. Lett.* **64** 2070 (1990)
209. Broholm C et al. *Phys. Rev. Lett.* **65** 3173 (1990)
210. Uemura Y J et al. *Phys. Rev. Lett.* **73** 3306 (1994)
211. Ramirez A P, Hesse B, Winklemann M *Phys. Rev. Lett.* **84** 2957 (2000)
212. Hagemann I S et al. *Phys. Rev. Lett.* **86** 894 (2001)
213. Higgins M J et al. *Phys. Rev. B* **61** R894 (2000)
214. Elser V *Phys. Rev. Lett.* **62** 2405 (1989)
215. Baxter R J *J. Math. Phys.* **11** 784 (1970)
216. Harris A B, Kallin C, Berlinsky A J *Phys. Rev. B* **45** 2899 (1992)
217. Nelson D R *Phys. Rev. B* **18** 2318 (1978)
218. Ritchey I, Chandra P, Coleman P *Phys. Rev. B* **47** 15342 (1993)
219. Chandra P, Coleman P, Ritchey I *J. Phys. I (Paris)* **3** 591 (1993)
220. Rzhchowski M S *Phys. Rev. B* **55** 11745 (1997)
221. Cherepanov V B, Kolokolov I V, Podivilov E V *Письма в ЖЭТФ* **74** 674 (2001)
222. Lee D H, Grinstein G, Toner J *Phys. Rev. Lett.* **56** 2318 (1986)

223. Coppersmith S N et al. *Phys. Rev. Lett.* **46** 549 (1981); *Phys. Rev. B* **25** 349 (1982)
224. Peierls R E *Proc. Camb. Philos. Soc.* **32** 477 (1936)
225. Domb C, in *Phase Transitions and Critical Phenomena* Vol. 3 (Eds C Domb, M S Green) (New York: Academic Press, 1974)
226. Saito Y Z. *Phys. B* **32** 75 (1978)
227. Wu F Y, Wang Y K J. *Math. Phys.* **17** 439 (1976)
228. Замолодчиков А Б *ЖЭТФ* **75** 341 (1978)
229. Доценко В С *ЖЭТФ* **75** 1083 (1978)
230. Korshunov S E, Vallat A, Beck H *Phys. Rev. B* **51** 3071 (1995)
231. Korshunov S E *Phys. Rev. B* **72** 144417 (2005)
232. Chalker J T, Holdsworth P C W, Shender E F *Phys. Rev. Lett.* **68** 855 (1992)
233. Reimers J N, Berlinsky A J *Phys. Rev. B* **48** 9539 (1993)
234. Sachdev S *Phys. Rev. B* **45** 12377 (1992)
235. Chubukov A *Phys. Rev. Lett.* **69** 832 (1992)
236. Chubukov A J. *Appl. Phys.* **73** 5639 (1993)
237. Veretennikov A V et al. *Physica B* **284–288** 495 (2000)
238. Ryazanov V V et al. *Phys. Rev. Lett.* **86** 2427 (2001)
239. Frolov S M et al. *Phys. Rev. B* **70** 144505 (2004)
240. Kontos T et al. *Phys. Rev. Lett.* **89** 137007 (2002)
241. Ryazanov V V et al. *Phys. Rev. B* **65** 020501 (2002)
242. Fisher M E, Ma S, Nickel B G *Phys. Rev. Lett.* **29** 917 (1972)
243. Swendsen R H *Phys. Rev. Lett.* **49** 1302 (1982)
244. Domany E, Schick M, Swendsen R H *Phys. Rev. Lett.* **52** 1535 (1984)
245. Van Himbergen J E *Phys. Rev. Lett.* **53** 5 (1984)
246. Jonsson A, Minnhagen P, Nylén M *Phys. Rev. Lett.* **70** 1327 (1993)
247. Caillol J M, Levesque D *Phys. Rev. B* **33** 499 (1986)
248. Minnhagen P *Phys. Rev. Lett.* **54** 2351 (1985); *Phys. Rev. B* **32** 3088 (1985)
249. Minnhagen P, Wallin M *Phys. Rev. B* **36** 5620 (1987); **40** 5109 (1989)
250. Thijssen J M, Knops H J F *Phys. Rev. B* **38** 9080 (1988)
251. Levin Y, Li X, Fisher M E *Phys. Rev. Lett.* **73** 2716 (1994)
252. Мигдал А А *ЖЭТФ* **69** 1457 (1975)
253. Kadanoff L P *Ann. Phys.* (New York) **100** 359 (1976)
254. Askew C R et al. *Comput. Phys. Commun.* **42** 21 (1986)
255. Sachrajda A et al. *Phys. Rev. Lett.* **55** 1602 (1985)
256. Daunt J G et al. *J. Low Temp. Phys.* **70** 547 (1988)
257. Davis J C et al. *Phys. Rev. Lett.* **60** 302 (1988)
258. Freeman M R et al. *Phys. Rev. Lett.* **60** 596 (1988)
259. Freeman M R, Richardson R C *Phys. Rev. B* **41** 11011 (1990)
260. Xu J, Crooker B C *Phys. Rev. Lett.* **65** 3005 (1990)
261. Wang X W, Gasparini F M *Phys. Rev. B* **34** 4916 (1986)
262. Stein D L, Cross M C *Phys. Rev. Lett.* **42** 504 (1979)
263. Воловик Г Е, Минеев В П *ЖЭТФ* **72** 2256 (1977)
264. Polyakov A M *Phys. Lett. B* **59** 79 (1975)
265. Хохлачев С Б *ЖЭТФ* **70** 265 (1976)
266. Kawamura H *Phys. Rev. Lett.* **82** 964 (1999)
267. Leggett A J *Rev. Mod. Phys.* **47** 331 (1975)
268. Минеев В П *УФН* **139** 303 (1983)
269. Leggett A J *Ann. Phys.* (New York) **85** 11 (1974)
270. Azaria P, Delamotte B, Mouhanna D *Phys. Rev. Lett.* **68** 1762 (1992)
271. Azaria P et al. *Phys. Rev. B* **45** 12612 (1992)
272. Forrester M G et al. *Phys. Rev. B* **37** 5966 (1988)
273. Forrester M G, Benz S P, Lobb C J *Phys. Rev. B* **41** 8749 (1990)
274. Chakrabarti A, Dasgupta C *Phys. Rev. B* **37** 7557 (1988)
275. Fisher M P A, Tokuyasu T A, Young A P *Phys. Rev. Lett.* **66** 2931 (1991)
276. Nelson D R *Phys. Rev. B* **27** 2902 (1983)
277. Korshunov S E *Phys. Rev. B* **46** 6615 (1992)
278. Li M S, Cieplak M *Phys. Lett. A* **184** 223 (1994)
279. Derrida B *Phys. Rev. Lett.* **45** 79 (1980); *Phys. Rev. B* **24** 2613 (1981)
280. Cha M-C, Fertig H A *Phys. Rev. Lett.* **74** 4867 (1995)
281. Sherrington D, Kirkpatrick S *Phys. Rev. Lett.* **35** 1792 (1975)
282. Edwards S F, Anderson P W J. *Phys. F: Met. Phys.* **5** 965 (1975)
283. Mézard M, Parisi G, Virasoro M A *Spin Glass Theory and Beyond* (Singapore: World Scientific, 1987)
284. Ozeki Y, Nishimori H J. *Phys. A: Math. Gen.* **26** 3399 (1993)
285. Maucourt J, Gempel D R *Phys. Rev. B* **56** 2572 (1997)
286. Carpentier D, Le Doussal P *Phys. Rev. Lett.* **81** 2558 (1998)
287. Carpentier D, Le Doussal P *Nucl. Phys. B* **588** 565 (2000)
288. Gupta P, Teitel S *Phys. Rev. Lett.* **82** 5313 (1999)
289. Imry Y, Ma S *Phys. Rev. Lett.* **35** 1399 (1975)
290. Binder K Z. *Phys. B* **50** 343 (1983)
291. Aizenman M, Wehr J *Phys. Rev. Lett.* **62** 2503 (1989)
292. Hui K, Berker A N *Phys. Rev. Lett.* **62** 2507 (1989)
293. Lee S J, Kim B, Lee J *Physica A* **315** 314 (2002)
294. Ko M K et al. *Phys. Rev. E* **67** 046120 (2003)
295. Cataudella V, Fazio R *Europhys. Lett.* **61** 341 (2003)
296. Choi M Y, Chung J S, Stroud D *Phys. Rev. B* **35** 1669 (1987)
297. Benedict K A, Moore M A *Phys. Rev. B* **39** 4592 (1989)
298. Granato E, Kosterlitz J M *Phys. Rev. Lett.* **62** 823 (1989)
299. Cataudella V *Europhys. Lett.* **44** 478 (1998)
300. Granato E, Domínguez D *Phys. Rev. B* **63** 094507 (2001)

### Phase transitions in continuously degenerate two-dimensional systems

S.E. Korshunov

*L.D. Landau Institute for Theoretical Physics, Russian Academy of Sciences,  
ul. Kosygina 2, 119334 Moscow, Russian Federation  
Tel. (7-495) 137-32 44. Fax (7-495) 938-20 77  
E-mail: serkor@itp.ac.ru*

The nature and sequence of phase transitions are discussed for continuously degenerate two-dimensional systems, in which an additional discrete degeneracy (which enables domain wall formation), the removal of an accidental degeneracy by fluctuations, the formation of solitons, or a random potential acting on vortices are to be taken into account along with the interaction of point-like topological excitations. While formally this means considering different modifications of the two-dimensional XY model, in physical terms the objects described by them are primarily superconducting hybrid structures and non-collinear planar antiferromagnets.

PACS numbers: 05.70.Fh, 64.60.Cn, 74.81.Fa, 75.10.Hk, 75.50.Ee

Bibliography — 300 references

Received 18 July 2005

*Uspekhi Fizicheskikh Nauk* **176** (3) 233–274 (2006)

*Physics–Uspekhi* **49** (3) (2006)